ETA 8/10/15

X pol. conv. $\Longrightarrow \partial X = \bigcup_{H \in \mathcal{F}(X)} X \cap \partial H$ $\quad$ $int(X) \neq \emptyset$ non serve

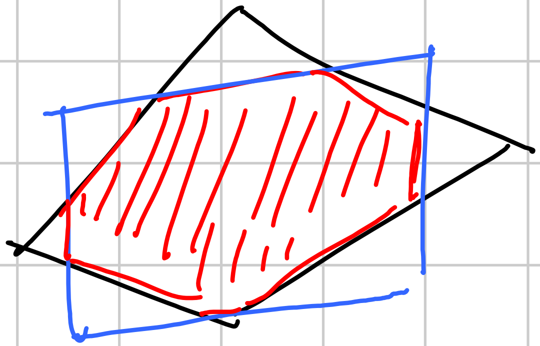
$int(X) = \emptyset \Longrightarrow \bar{X} \subsetneq \mathbb{R}^N \Longrightarrow X = X \cap \partial H = \partial X$

∂H opportuno iperpiano

Per $H_*(\mathcal{K}) = H_*(|\mathcal{K}|)$ resta:

$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ complessi politopali con $|\mathcal{K}_1| = |\mathcal{K}_2|$
allora $\exists\, \mathcal{L} < \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$.

<u>Prop</u>: σ_1, σ_2 politopi conv $\Longrightarrow$ $\sigma_1 \cap \sigma_2$ anche.



Accettata la Prop:

$$\mathcal{L} = \{ \sigma_1 \cap \sigma_2 : \sigma_j \in K_j \}$$

chiaro che $|\mathcal{L}| = |K_1| = |K_2|$ ed è complesso politopale (esercizio)

(Volendo : $\tilde{\mathcal{L}} = \{ \tau$ faccia di qualche $\sigma \in \mathcal{L} \}$)

La Prop segue da:

Prop: $X \subset \mathbb{R}^N$ politopo convesso $\Longleftrightarrow$ è limitato ed è $\bigcap$ finita di semispazi chiusi

Dim: $\underline{\Longrightarrow}$

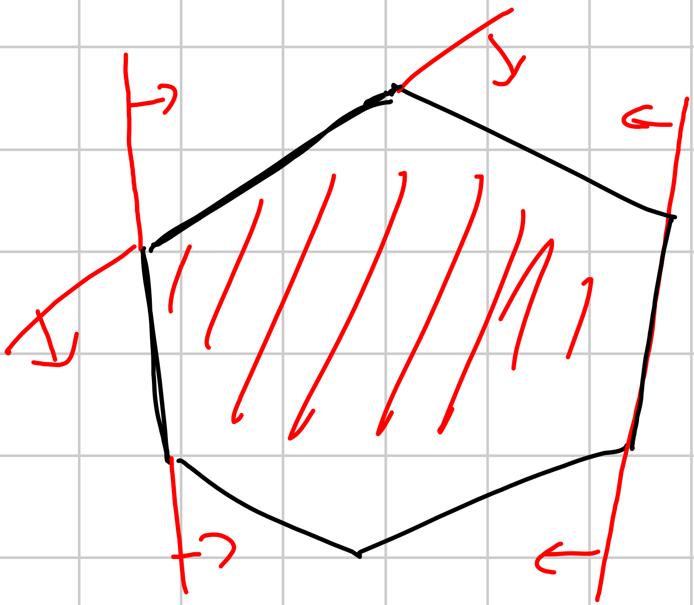
Notiamo che:
- X è intersezione di semispazi
- ogni intersezione di semispazi di $\overline{X}$ è intersezione di semispazi di $\mathbb{R}^n$

Dunque wlog $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^N}(X) \neq \emptyset$.

Sia $X = \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_k)$ vertici ;

ha un numero finito di facce (ognuna è $\mathrm{Conv}(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$).

Siano $Y_j = X \cap \partial H_j$ $j = 1, \dots, p$ le facce di codim 1.



Affermo che $X = H_1 \cap \dots \cap H_p$

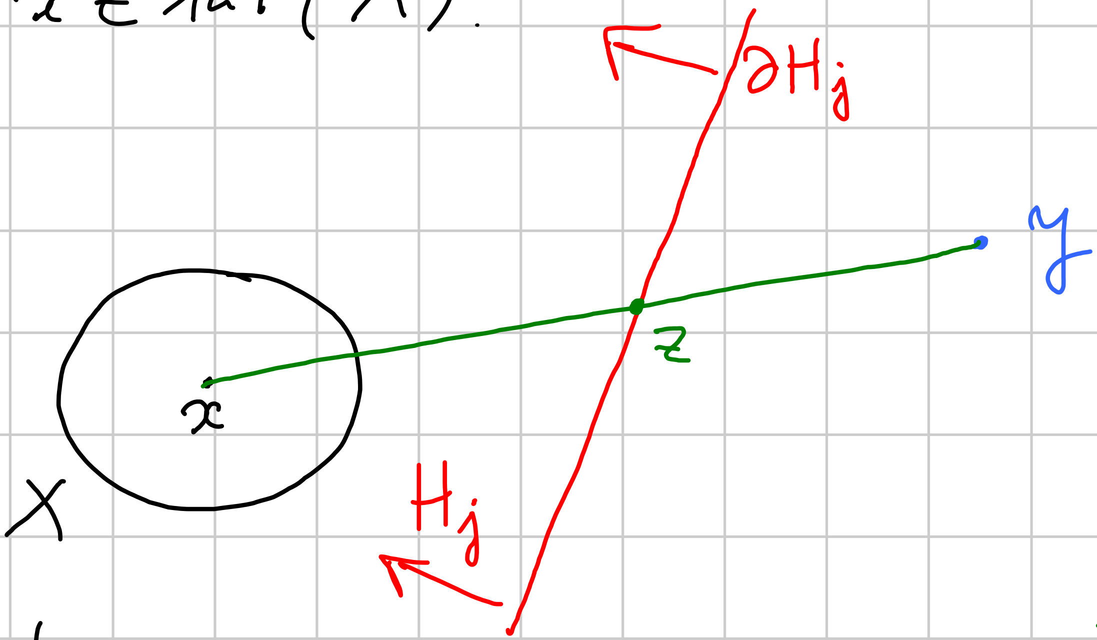
(basta perché X è limitato).

$H_j \in \mathcal{J}(X) \Rightarrow X \subset H_j$

$\Rightarrow X \subset H_1 \cap \dots \cap H_p$ ovvio.

Proviamo $X \supseteq H_1 \cap \dots \cap H_p$ p.e.: sia $y \in H_1 \cap \dots \cap H_p$, $y \notin X$.

Prendo $x \in \mathrm{int}(X)$.



$z \in \partial X$

Inoltre a meno di perturbare x ho $z \in Y_j = X \cap \partial H_j$

$\Longrightarrow y \notin H_j$: assurdo.

$\underline{\Leftarrow}$ X lim. $X = H_1 \cap \ldots \cap H_p \Rightarrow X$ politopo convesso

Sicuramente è convesso $\Rightarrow$ ho $\overline{X}$.

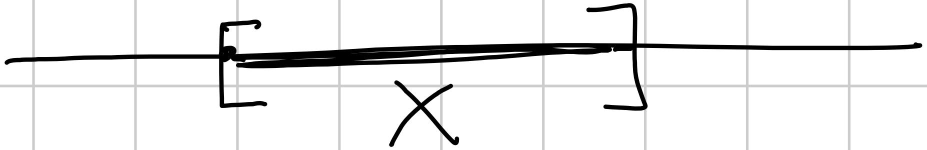
Osservo: anche su $\overline{X}$ ho X = intersez. finita di semispazi:

* butto via gli H_j con $\partial H_j \supset \overline{X}$
* prendo $\overline{X} \cap H_j$ per gli altri.

Dunque wlog $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^N}(X) \neq \emptyset$.

Induzione su N.

$N=1$



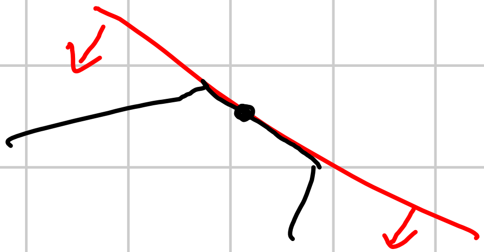
<u>OK</u>

P.I. Sia $X = H_1 \cap \dots \cap H_p$ limitato con $\mathrm{int}(X) \neq \emptyset$

Affermo che

$$\partial X = (X \cap \partial H_1) \cup \dots \cup (X \cap \partial H_p)$$

Facile: $\supset$:



C $\quad x \in X$, $x \notin \partial H_j$ per $j = 1 \dots p$

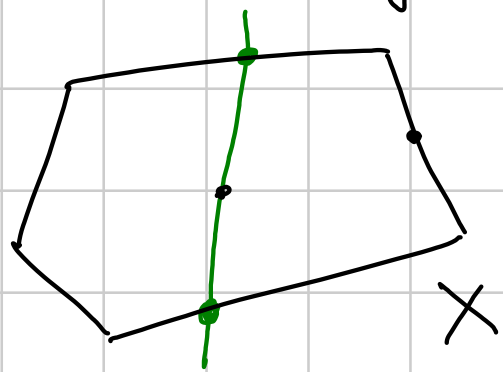
$\Rightarrow x \in \operatorname{int} H_j$

$\Rightarrow x \in \operatorname{int}(H_1 \cap \dots \cap H_p) = \operatorname{int}(X)$

Ora per ip. ind. $\quad X \cap \partial H_j = \operatorname{Conv}(\mathcal{F}_j) \qquad \# \mathcal{F}_j < +\infty$.

Inoltre $X = \operatorname{Conv}(\partial X)$

$\Rightarrow X = \operatorname{Conv}(\mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_p)$.



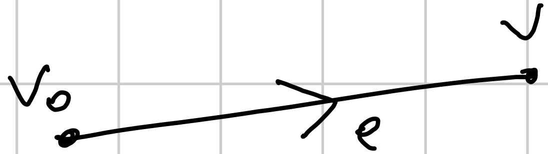
$\blacksquare$

Notazione $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \dots$ compl. simpl. $X = |\mathcal{K}|$, $Y = |\mathcal{L}|$ $\dots$

Oss: $H_*(X \sqcup Y) = H_*(X) \oplus H_*(Y)$

Studiamo $H_0(X)$.

Def: sia $\mathcal{K}$ orientato. Se $e \in \mathcal{K}^{[1]}$ indico $v_0(e), v_1(e) \in \mathcal{K}^{[0]}$



.

Chiamo cammino simpliciale $e_0^{\varepsilon_0} \cdot \ldots \cdot e_k^{\varepsilon_k}$ $\quad e_j \in K^{[1]}$

$\varepsilon_j = \pm 1$

con $v_0(e_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}}) = v_1(e_j^{\varepsilon_j})$

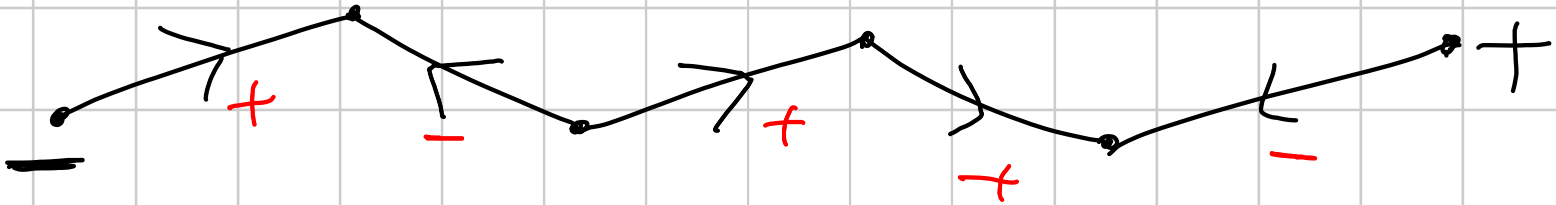
con $v_0(e^{+1}), v_1(e^{+1}) = v_0(e), v_1(e)$

$v_0(e^{-1}), v_1(e^{-1}) = v_1(e), v_0(e)$.

Definisce una mappa continua $\alpha : [0,1] \to X$ che unisce $v_0(\alpha) = v_0(e_0^{\varepsilon_0})$ a $v_1(\alpha) = v_1(e_k^{\varepsilon_k})$.

Inoltre definisco $\alpha \in C_1(K)$ con

$$\partial\alpha = v_1(\alpha) - v_0(\alpha).$$



<u>Lem</u>: Sono fatti equiv:

(1) X connesso (2) X connesso per archi

(3) $|K^{(1)}|$ è connesso (per archi)

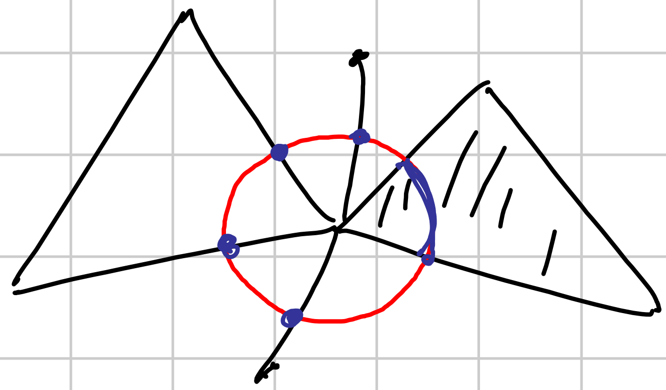
(4) $\forall v_0, v_1 \in K^{[0]}$ sono uniti da cammino simpliciale

(5) $\forall v_0, v_1$ " " " semplice

<u>Dim</u>: (1) $\Longrightarrow$ (2) ✓

(2) $\Longrightarrow$ (1) poiché X è loc. a.c.; per $\varepsilon << 1$ $x \in X$ ho $B_\varepsilon(x) \cap X$ = cono da x su $\partial B_\varepsilon(x) \cap X$

$\left(\varepsilon = \frac{1}{2} \max \operatorname{diam} \{ \sigma \in K : \dim(\sigma) \geq 1 \} \right)$.



(2) $\Rightarrow$ (3) Siano $x_0, x_1 \in |X^{(1)}|$.

So che X è a.c. $\Rightarrow \exists\, \alpha : [0,1] \to X$

$\alpha(0) = x_0, \quad \alpha(1) = x_1.$

$d(A,B) = \min \{ d(a,b) : a \in A,\ b \in B \}$

$\varepsilon < \frac{1}{2} \min \{ d(\sigma_1, \sigma_2) : \sigma_1, \sigma_2 \in K, \ \sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset \}$

$U_\varepsilon(\sigma) = \{ x \in X : d(x, \sigma) < \varepsilon \}$

Oss: se $U_\varepsilon(\sigma_1) \cap U_\varepsilon(\sigma_2) \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$.

$\{ \alpha^{-1}(U_\varepsilon(\sigma)) : \sigma \in K \}$ ric. aperto (finito) di $[0,1]$

$\Rightarrow \exists \ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ t.c.

$\alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset U_\varepsilon(\sigma_j)$

Ora $\alpha(t_j) \in \alpha([t_{j-1}, t_j]) \cap \alpha([t_j, t_{j+1}])$

$\Longrightarrow U_\varepsilon(\sigma_j) \cap U_\varepsilon(\sigma_{j+1}) \neq \emptyset$

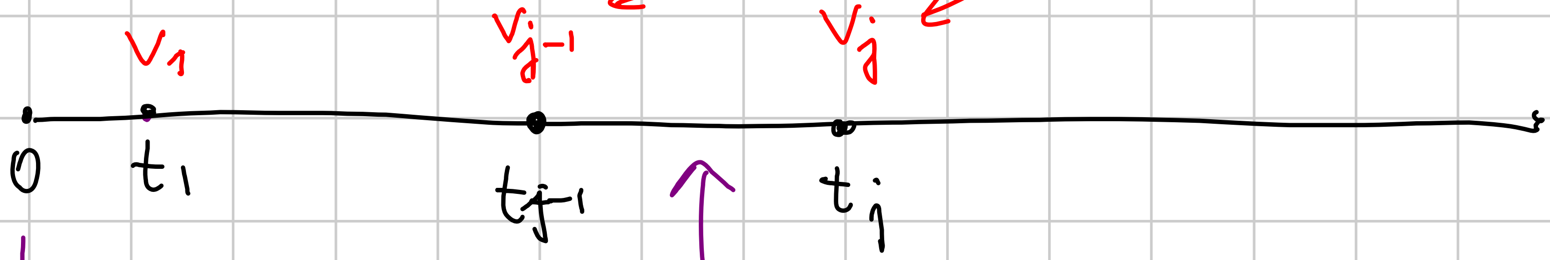
$\Longrightarrow \sigma_j \cap \sigma_{j+1} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow$ $\bar{\text{e}}$ faccia di entrambi

$\Longrightarrow$ contiene $v_j \in K^{[0]}$

Ora definisco un cammino in $|K^{(1)}|$ ridefinendo α sui $[t_{j-1}, t_j]$.

nuove def. del cammino



posso definire come l'unico lato di σ_j che unisce v_{j-1} e v_j

$\alpha(0) \in \sigma_1^{(1)}$

$v_1 \in \sigma_1^{[0]}$

$\Rightarrow$ su $[0, t_1]$ definisco come punti di un lato di σ_1

$(3) \Rightarrow (2)$ Se $x_0, x_1 \in X$ ho $x_0 \in \sigma_0$, $x_1 \in \sigma_1$

unisco x_0 a $x_0' \in |\sigma_0^{(1)}|$ e x_1 a $x_1' \in |\sigma_1^{(1)}|$

$(3) \Rightarrow (4)$ Come $(2) \Rightarrow (3)$ senza complicazione degli estremi

$(4) \Rightarrow (3)$ ✓

$(4) \Rightarrow (5)$ Basta prendere un cammino simpliciale di lunghezza minimale

$(5) \Rightarrow (4)$

Prop: X connesso $\Longrightarrow H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

$\left(H_0(X) = \langle v_0 \rangle \qquad v_0 \in K^{[0]} \right)$

Dim: Oriento $K^{[0]}$ con tutti $+$.

$Z_0(K) = C_0(K) = \mathbb{Z}\langle K^{[0]} \rangle$.

Se $v_0, v_1 \in K^{[0]}$ $\exists\, \alpha$ cammino simpl. con $\partial\alpha = v_1 - v_0$

anche nel senso delle catene

$\Rightarrow$ in $H_0 = Z_0/B_0$ ho $[v_1] = [v_0]$.

Formalmente : $\left[\sum n_j v_j\right] \longmapsto \sum n_j$

Ben def : $\partial e = v_1(e) - v_0(e) \longmapsto 1 - 1 = 0$

Omomorfismo ✓

Surgettivo $\quad n \cdot v_0 \longmapsto n$

Iniettivo :

Affermo che se $\sum n_j = 0$ allora $\sum n_j v_j \in B_0$.

Per induzione su $\sum |m_j|$. Se è 0 <u>ok</u>

Se no esistono $m_1 < 0 < m_2$.

<u>Prendo</u> $\alpha \in C_1(K)$ (cammino simpliciale)

con $\partial \alpha = v_1 - v_2$

$$\sum m_j v_j + \partial \alpha = (m_1 + 1) v_1 + (m_2 - 1) v_2 + \sum_{j \neq 1,2} m_j v_j$$

$$\Rightarrow \sum |m_j'| = \sum |m_j| - 2 \Rightarrow \dots \quad \blacksquare$$

$H_1(X)$.

G gruppo : $[G,G] = \langle [a,b] : a,b \in G \rangle$

$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$

$g\,[a_1,b_1]\cdots[a_n b_n]\,g^{-1} = [ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}] \cdots [ga_ng^{-1}, gb_ng^{-1}]$

$\Longrightarrow [G,G] \triangleleft G$

$\Longrightarrow Ab(G) = G/_{[G,G]}$ abelianizzato di G.

<u>Thm</u>: X connesso $\Longrightarrow$ $H_1(X) \cong Ab(\pi_1(X))$.

<u>Idea</u>: α laccio continuo in $x_0 \in X^{[0]}$

$\Longrightarrow$ $\alpha \simeq_{x_0} \beta$ $\quad$ β laccio simpliciale

e $\quad \beta_1 \simeq_{x_0} \beta_2 \Longrightarrow [\beta_1] = [\beta_2] \in H_1(X)$

(Fatti <u>NON</u> ovvi.)

Assumendoli:
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\varphi} & H_1(X) \\ [\alpha] & \longmapsto & [\beta] \end{array}$$

è ben def.

Chiaro: surgettiva.

Poiché $H_1(X)$ è abeliano ho $\operatorname{Ker}\varphi \supset [\pi_1(X), \pi_1(X)]$.

In realtà $\operatorname{Ker}\varphi = [\cdot, \cdot]$.

Gruppo finitamente presentato

$$G = \langle \underbrace{a_1, \dots, a_k} / \underbrace{r_1, \dots, r_h} \rangle$$

generatori relazioni

$a_1, \dots, a_k$ lettere ; $r_1, \dots, r_h$ parole nell'alfabeto $a_1^{\pm 1}, \dots, a_k^{\pm 1}$

$$G = \frac{\langle a_1 \rangle * \dots * \langle a_k \rangle = \mathbb{Z}^{*k}}{\text{minimo sottogruppo normale di } \mathbb{Z}^{*k} \text{ che contiene } r_1, \dots, r_h}$$

Lem: Se $G = \langle a_1, \dots, a_k \mid r_1, \dots, r_h \rangle \Longrightarrow$

(1) $Ab(G) = \langle a_1, \dots, a_k \mid r_1, \dots, r_h, [a_i, a_j] \ \forall i \neq j \rangle$

(2) $Ab(G) = \langle a_1, \dots, a_k \mid \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_h, [a_i, a_j] \ \forall i \neq j \rangle$

$$r = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_p}^{\varepsilon_p} \Longrightarrow \tilde{r} = \prod_{i=1}^{k} a_i^{\left(\sum_{s,\, i_s = i} \varepsilon_s \right)}$$

(l'anagramma in ordine alfabetico)

Dim: (1) $Ab(G) = G/_{[G,G]}$; $\pi : \mathbb{Z}^{*k} \longrightarrow G$

$\Rightarrow$ devo vedere che $[G,G] = N\left(\left\langle [\pi(a_i), \pi(a_j)] : i \neq j \right\rangle\right)$

$\left(\text{Uso } G/_{N(H \cup K)} = \left. G/_{N(H)} \right/ _{N(\operatorname{Im} K)} \right).$

Basta vedere che $[\mathbb{Z}^{*k}, \mathbb{Z}^{*k}] = N\left(\left\langle [a_i, a_j] : i \neq j \right\rangle\right)$.

Noto:

$$[a^{-1}, b] = a^{-1} b a b^{-1} = a^{-1} b a b^{-1} a^{-1} a$$
$$= a^{-1} [b, a] a$$

$$[a, b^{-1}] = b^{-1} [b, a] b$$

$$[a^{-1}, b^{-1}] = (ba)^{-1} [a, b] (ba)$$

$$\Longrightarrow [a_i^{\pm 1}, a_j^{\pm 1}] \in N\left(\langle [a_i, a_j] : i \neq j \rangle \right).$$

Concludo usando ricorsivamente :

$$[a\cdot b, c] = (ab)c\,(ab)^{-1}c^{-1} = abcb^{-1}a^{-1}c^{-1}$$

$$= ab(b^{-1}cc^{-1}b)\,cb^{-1}a^{-1}c^{-1}\,(acc^{-1}a^{-1})$$

$$= ac\,(c^{-1}bcb^{-1})\,(a^{-1}c^{-1}ac)\,c^{-1}a^{-1}$$

$$= (ac)\,[c^{-1},b]\,[a^{-1},c^{-1}]\,(ac)^{-1}.$$

(2) $\tilde{\pi}_j = \pi_j$ tenendo conto che $[a_i, a_j] = 1$ nell'abelianizzato. $\blacksquare$

Def: $X = |K|$ con $K = K^{(1)}$ X è un grafo.
Un grafo è un albero se non contiene alcun laccio simpliciale semplice non costante.

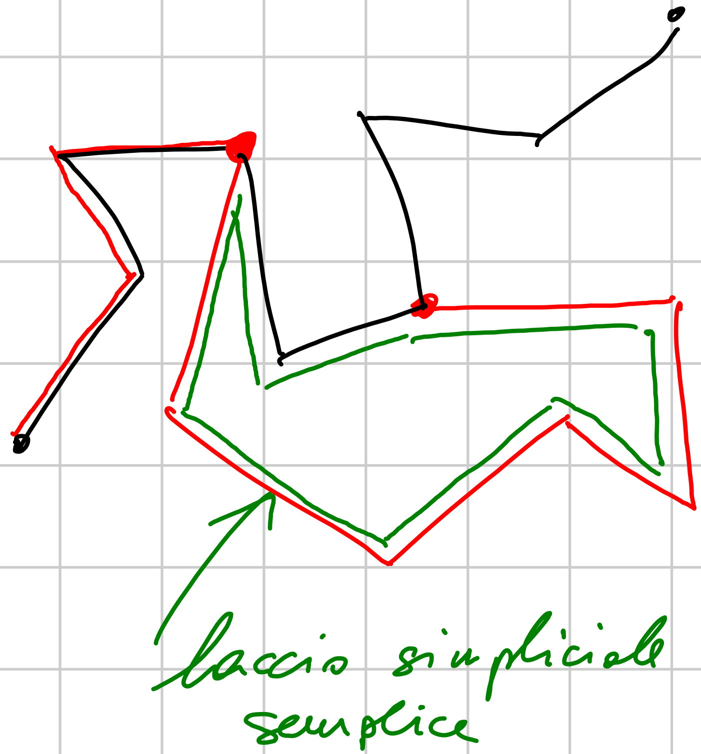
Visto: X connesso $\Rightarrow v_0, v_1 \in K^{[0]}$ sono uniti da cammino simpliciale semplice

Lem: se X è albero tale cammino è unico.

Dim: prendo due cammini λ di vertici: λ distinti
(gli estremi determinano un lato)

$$v_0 = w_0, w_1, \ldots, w_m = v_1$$
$$v_0 = w_0', w_1', \ldots, w_{m'}' = v_1$$

$$i = \min\{j : w_{j+1}' \neq w_j\}$$
$$k = \min\{j > i : w_j' \in \{w_*\}\}$$
$$w_k' = w_\ell$$



laccio : $w_i, w_{i+1}, \ldots, w_\ell = w'_k, w'_{k-1}, \ldots, w'_i = w_i$ — $\blacksquare$