

ETA 6/10/15

K complesso simpliciale orientato $\subset \mathbb{R}^n \leadsto H_*(K)$

- Indipendenza da orientazione

- $L < K \Rightarrow H_*(K) \cong H_*(L)$ canonicamente

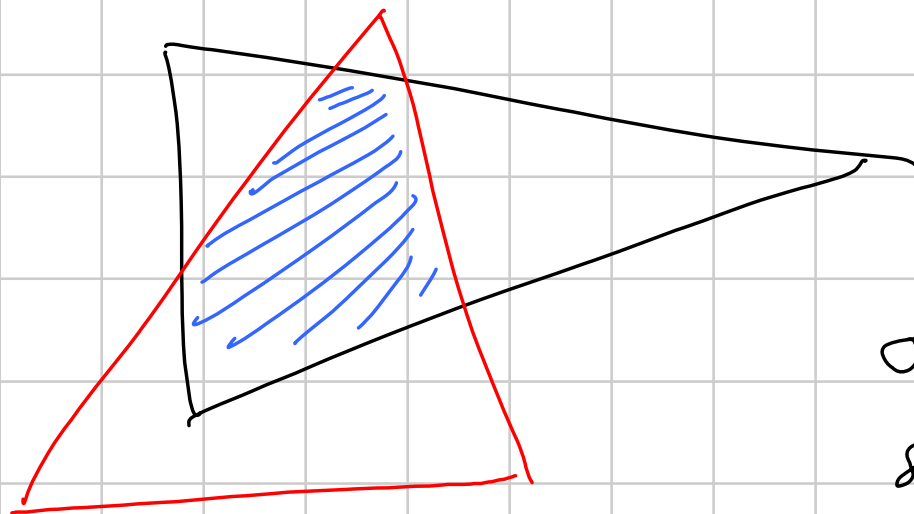
- $|K_1| = |K_2| \Rightarrow \exists L < K_1, K_2$

$\Rightarrow H_*(K) = H_*(|K|)$

Difficoltà: $|K_1| = |K_2| =: X$

$$\Rightarrow X = |\mathcal{L}| \quad \mathcal{L} = \{ \sigma_1 \cap \sigma_2 : \sigma_j \in K_j \}$$

Pero:

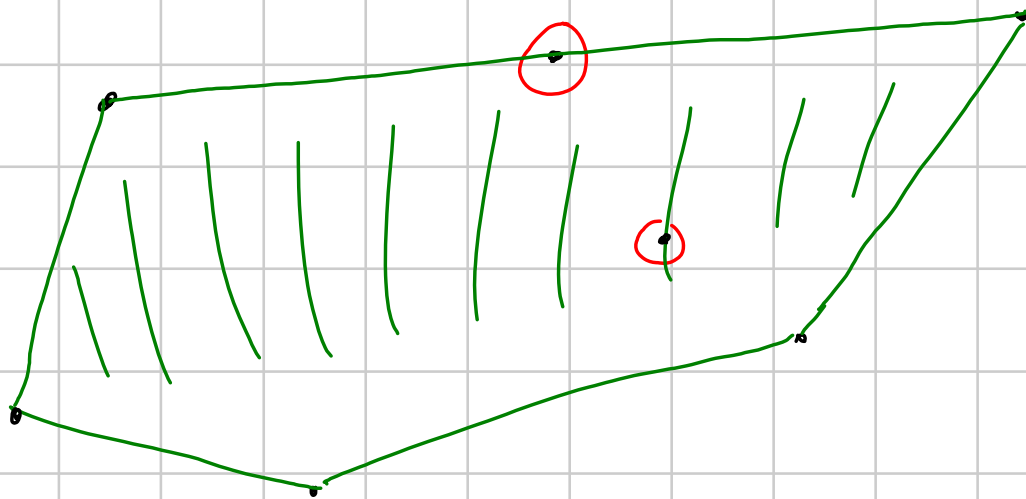


$\sigma_1 \cap \sigma_2$ non è
simplice -

Solut: passare ai complessi politopoli -

Def: chiamo politopo convesso in $\mathbb{R}^n$
 $\text{Conv}(p_1, \dots, p_m)$

$$p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$$

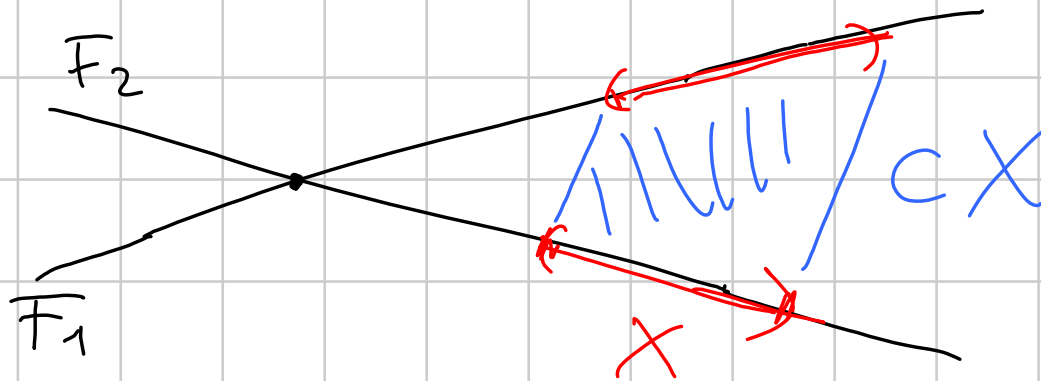


$\bar{}$ è chiuso
in $\mathbb{R}^n$

Leu: $\text{Conv}(p_1, \dots, p_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i p_i : t_i \geq 0, \sum_{i=1}^m t_i = 1 \right\}$.

Leu: $X \subset \mathbb{R}^m$ convesso $\Rightarrow \exists!$ stp. aff. F t.c.
 $\text{int}_F(X \cap F) \neq \emptyset$ e F ha dim. max.
 Inoltre se lo indicia con $\bar{X}$ ho $X \subset \bar{X}$

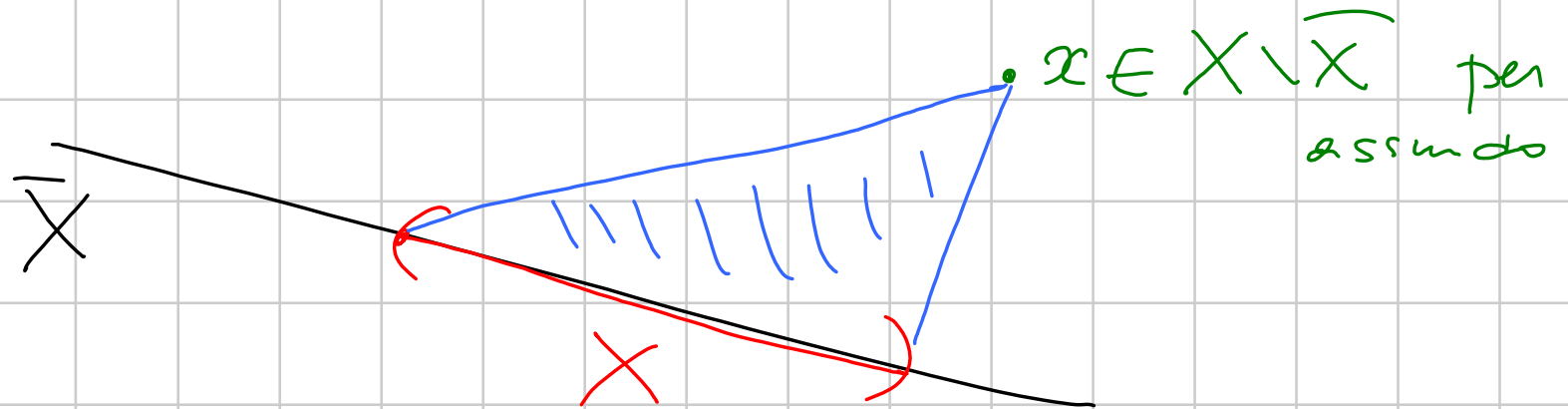
Dim: $\exists$: $\dim F \leq N \Rightarrow \text{ok}$.
 ! : $\dim F_1 = \dim F_2$ $F_1 \neq F_2 \Rightarrow \dim(F_1 + F_2) > \dim F_1$



$$\text{int}_{F_1+F_2} (X \cap (F_1+F_2)) \neq \emptyset$$

contro
massimalità^c

$$X \subset \overline{X}$$



$$\Rightarrow \dim(\{x\} + \overline{X}) = \dim \overline{X} + 1$$

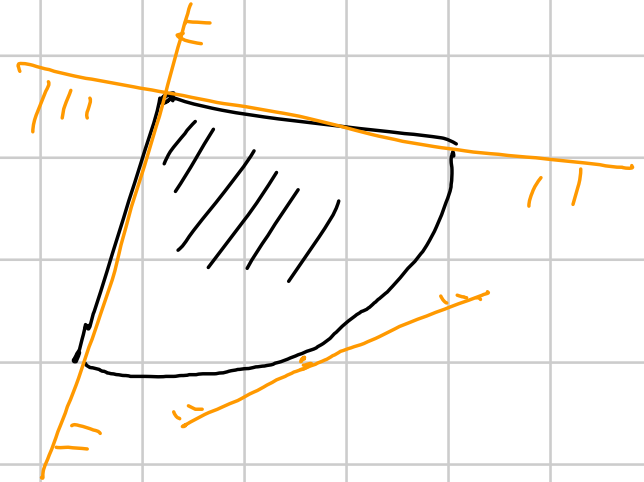
e su di esso X ha pt. interi.



Def: $H \subset \mathbb{R}^N$ semispazio si dice di supporto per X convesso se $X \subset H$. Chiamo
 $\mathcal{J}(X) = \{ \text{tutti i semispazi di supporto} \} -$

Esercizio: $X = \bigcap_{H \in \mathcal{J}(X)} H$

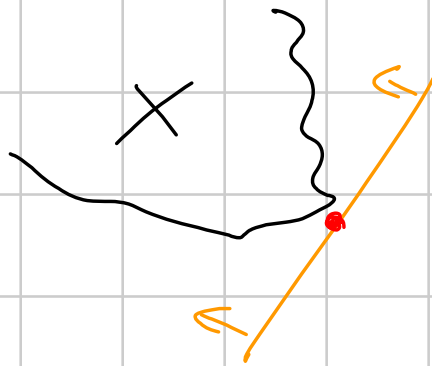
 X convesso chiuso



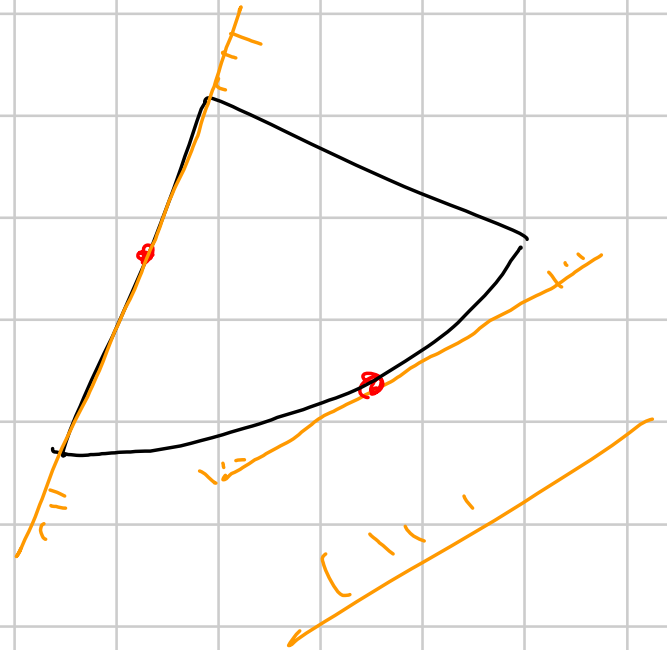
Lev: $X \subset \mathbb{R}^N$ convesso chiuso, $\text{int}_{\mathbb{R}^N}(X) \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \partial X = \bigcup_{H \in \mathcal{I}(X)} X \cap \partial H.$$

Dim: $x \in X \cap \partial H$



$\Rightarrow x \in \partial X$

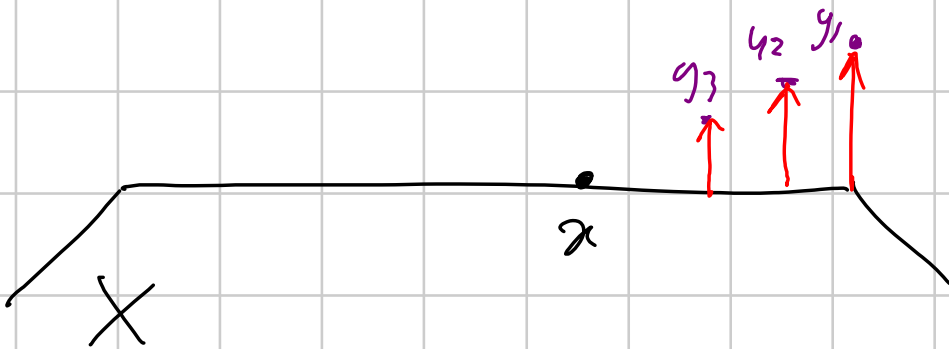


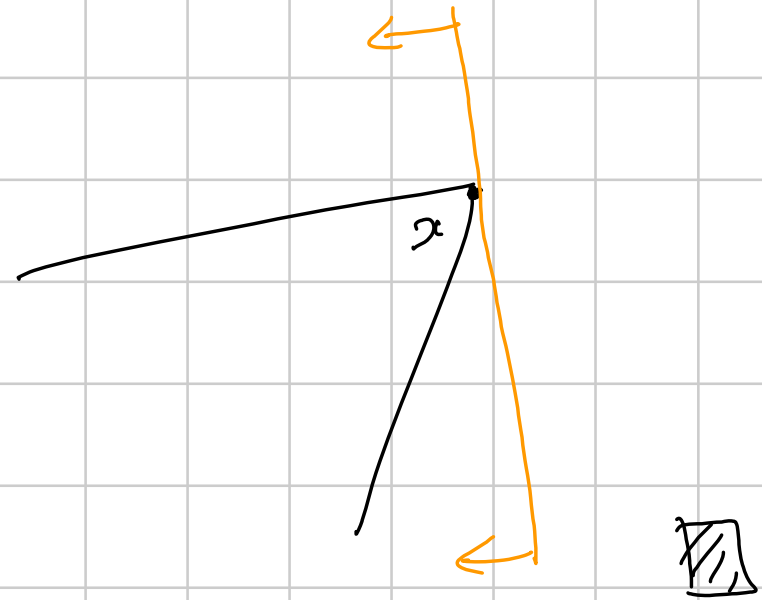
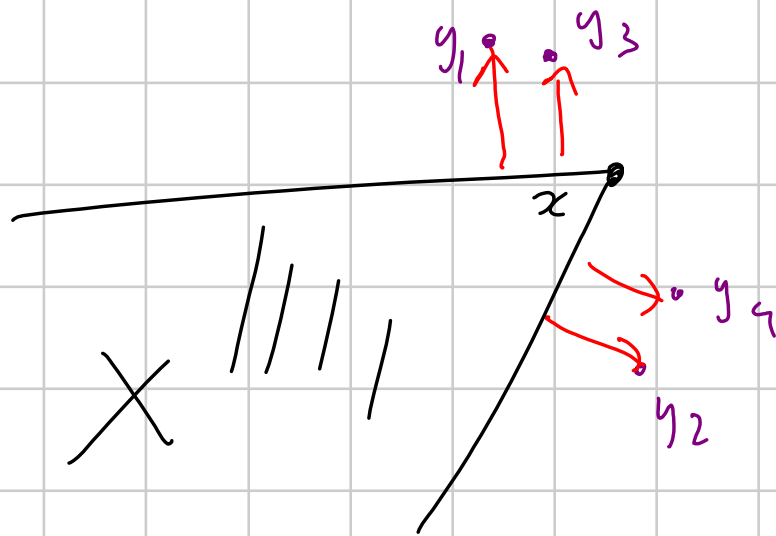
Viceversa sia $x \in \partial X \Rightarrow \exists (y_m)_{m=0}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n \setminus X$
 con $y_m \rightarrow x$

Sia $x_m \in X$ il pto di X più vicino a y_m -

Wlog: $\frac{x_m - y_m}{\|x_m - y_m\|} \rightarrow v \in S^{n-1} \quad (S^{n-1} = \text{pt})$

$\Rightarrow x + v^+ \in \partial H$ con H di supporto





Scopo: definire vertici/face di un poliedro conv.

LEM: $p_0 \in \text{Conv}(p_1, \dots, p_m) \iff \text{Conv}(p_1, \dots, p_m) = \text{Conv}(p_0, p_1, \dots, p_m)$

Dir: $\Rightarrow$: $\subset$

$$p_0 = \sum_{i>0} \lambda_i p_i$$

$$\sum_{i>0} t_i p_i = t_0 \sum_{i>0} \lambda_i p_i + \sum_{i>0} t_i p_i$$

$$= \sum_{i>0} (t_0 \lambda_i + t_i) p_i$$



awio_

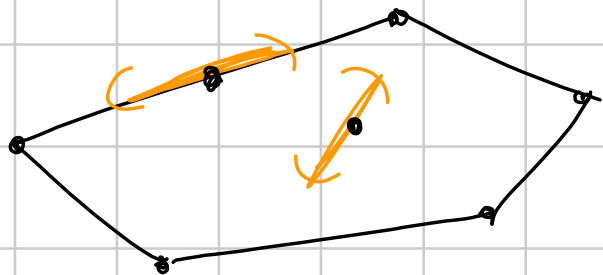


Prop: dati $P_1, \dots, P_m$ esiste un'unica $\{v_1, \dots, v_h\} \subset \{P_1, \dots, P_m\}$
minimale t.c. $\text{Conv}(v_1, \dots, v_h) = \text{Conv}(P_1, \dots, P_m)$.

Dim: $\exists$ ok

!

Provo che se $\{v_1, \dots, v_h\}$ è minimale allora
i v_j sono caratterizzati dalla proprietà di
non essere interni ad alcun segmento con estremi in X .



Defatti: • sia p.a. $v_1 \in (y, z)$ $y = \sum_{i \geq 1} t_i v_i$ $z = \sum_{i \geq 1} \pi_i v_i$

$$v_1 = \lambda y + (1-\lambda)z = \underbrace{(\lambda t_1 + (1-\lambda)\pi_1)}_{\substack{0 < \lambda < 1 \Rightarrow \\ t_1 < 1 \quad \pi_1 < 1}} v_1 + \dots$$

$$\Rightarrow v_1 = \sum_{i \geq 2} \frac{\lambda t_i + (1-\lambda)\pi_i}{1 - (\lambda t_1 + (1-\lambda)\pi_1)} v_i$$

comb. con r.

$$\Rightarrow v_1 \in \text{Conv}(v_2, \dots, v_n)$$

$\Rightarrow$ posso eliminare v_1 .

• Se $x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$ $x = \sum_{i=1} t_i v_i$ almeno due $t_i > 0$

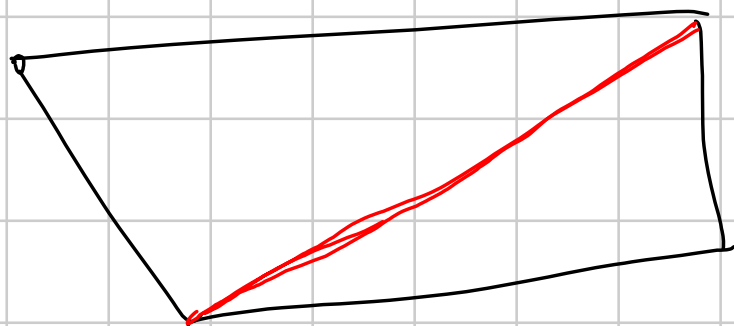
$$\text{wlog } 0 < t_1 < 1 \Rightarrow x = \underbrace{t_1 v_1 + (1-t_1) \sum_{i=2} \frac{t_i}{1-t_1} v_i}_{\text{comb conv.}}$$

$$\Rightarrow x \in \text{int}(v_1, \sum \dots)$$



Li chiamo vertici -

Oss: non va bene definire faccie = $\text{Conv}(\text{alcuni vertici})$



Def: Chiamo faccia di $X = \text{Conv}(p_1, \dots, p_m)$
una $X \cap \partial H$ con $H \in \mathcal{H}(X)$ —

Lem: ogni faccia $\bar{e}$ è un politopo convesso —

Dim: Wlog

$$X = \text{Conv}(v_1, \dots, v_h)$$

vertici

$$H = \{x : x_i \geq 0\}$$

$$x_i(v_j) \begin{cases} = 0 & j=1, \dots, p \\ > 0 & j=p+1, \dots, h \end{cases}$$

$$\Rightarrow X \cap \partial H = \text{Conv}(v_1, \dots, v_p) :$$

$$x_i(\sum t_i v_i) = 0 \iff t_i = 0 \text{ per } i > p.$$



Def: $\dim X = \dim \overline{X}$

Def: ∂X = unione delle facce proprie di X

Con: ∂X è il bordo topologico di X su $\overline{X}$
(segue dal lemma a pag. 7)

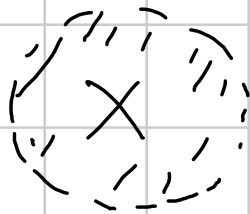
Lemma: ∂X è unione delle facce di codim. 1

Dim: Ragionando su $\overline{X}$ su cui X ha pt. interni.

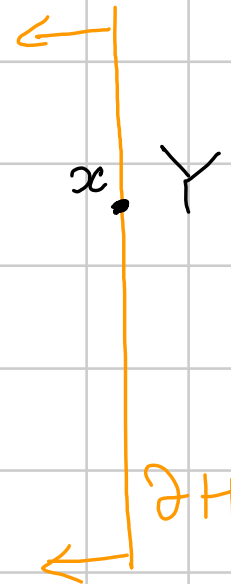
Sia $x \in \partial X$. Dunque $x \in X \cap \partial H$, $H \in \mathcal{F}(X)$
 $\dim(X \cap \partial H) = m-1$ ✓

Se $\dim(X \cap \partial H) \leq m-2$, cioè

$X \cap \partial H \subset \underline{Y}$ stsp. affine $\downarrow \overline{X}$ con codim 2

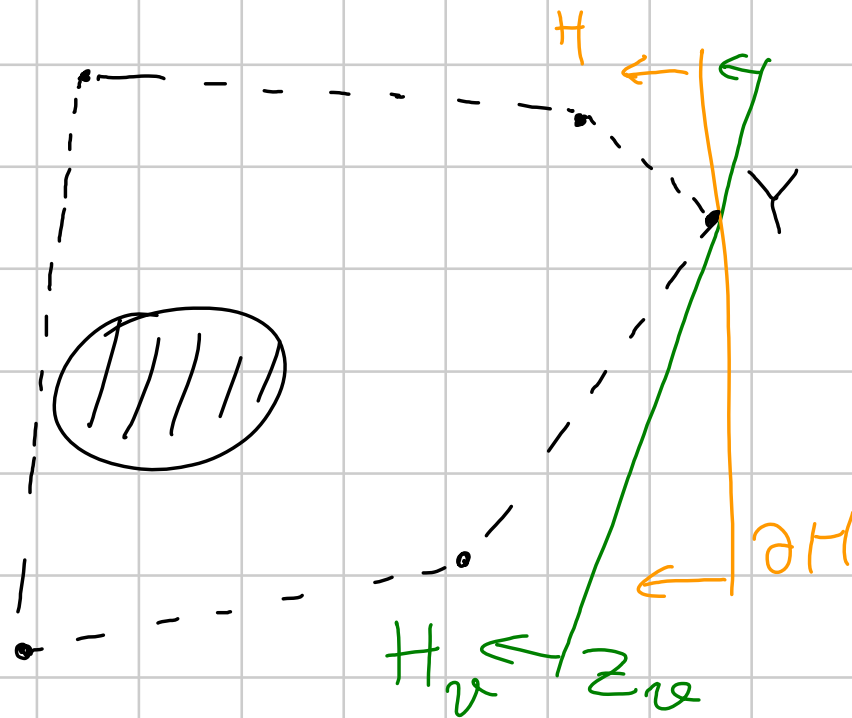


$\overline{X}$



One punto ∂H interno a x_-

Chiamo Z_v quello ruotato e H_v
 il semispazio con bordo Z_v che
 sta dalla stessa parte di H rispetto a ∂H

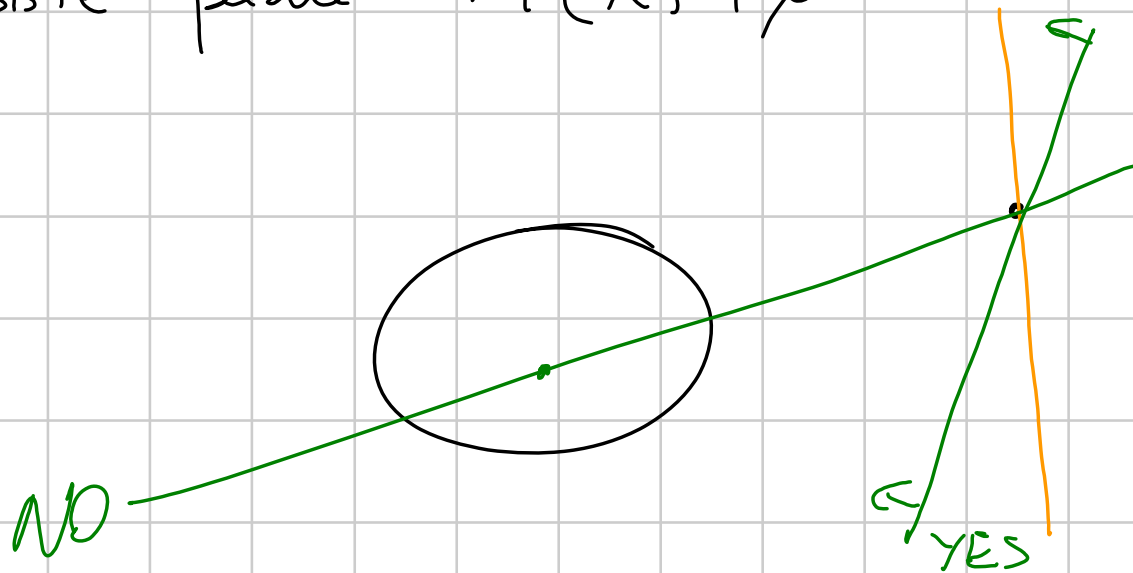


$$X = \text{Conv}(p_1, \dots, p_m)$$

$$X \cap \partial H \subset Y$$

i $p_1, \dots, p_m$ non in Y hanno $\text{dist.} > 0$ da ∂H
 $\Rightarrow$ per $v \ll 1$ $Z_v \supset X$ -

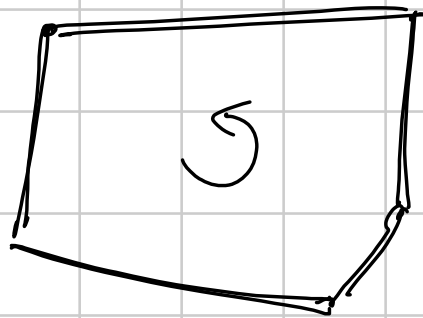
Può $\inf \{v > 0 : Z_v \cap X \not\subset Y\} =: v_0$
 esiste perché $\text{int}(X) \neq \emptyset$



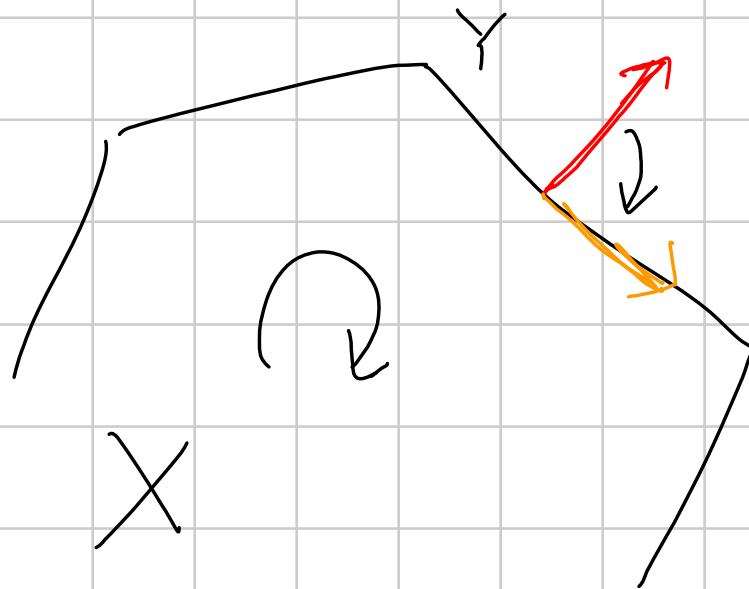
Sostituendo H con H_{v_0} ho $\dim(X \cap \partial H_{v_0}) \underset{\substack{= \\ Z_{v_0}}}{>} \dim(X \cap \partial H)$.

Stesso fino a codim. 1. 

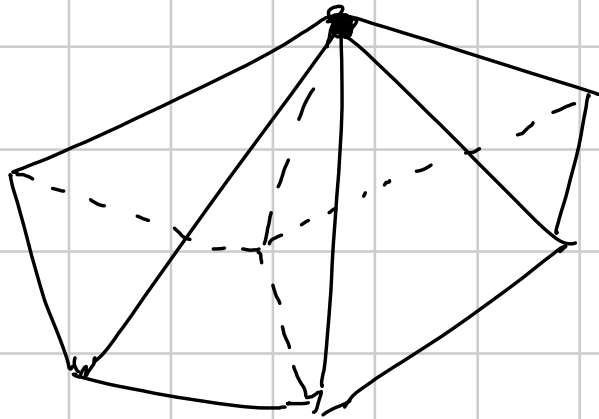
Def: chiamo orientez. per X una b-orientazione per $\overline{X}$
 (osserva: non ho una p-def:



Def: se $Y \subset X$ è faccia di codim 1
e X è orientato ha orientaz. indotta $X \rightsquigarrow Y$
"outer normal first"



Ese: se $Z \subset X$ è faccia di codim 2 esistono esattamente due facce di codim 1 che la contengono. Inoltre se sono Y_1, Y_2

$$\begin{aligned} X &\rightsquigarrow Y_1 \rightsquigarrow Z \\ X &\rightsquigarrow Y_2 \rightsquigarrow Z \end{aligned} \quad \text{sono opposte}$$


Possiamo definire

- complesso poliedrale $\mathcal{K} =$ famiglia di poliedri convessi in $\mathbb{R}^n$ t.c.

- $\tau \subset \sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \tau \in \mathcal{K}$

- $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K} \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2$ faccia di entrambi.

- $C_n(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}(\mathcal{K}^{[n]})$

- $\partial_n: C_n(\mathcal{K}) \rightarrow C_{n-1}(\mathcal{K})$ se $\mathcal{K}$ è orientato

- $Z_n(\mathcal{K}), B_n(\mathcal{K}), H_n(\mathcal{K}) = Z_n/B_n$

- indipendenza da orientazione -
- $2 < K$ suddivisione che induce isomorfismo in H_x

Prop: due complessi poliedrici con lo stesso supporto hanno suddivisione comune -

$\Rightarrow$ Indipendenza di H_x dalla triangolazione -

Oss: in realtà non serve definire H_x per poliedrici perché ogni compl. poliedrico ha suddivisione simpliciale -

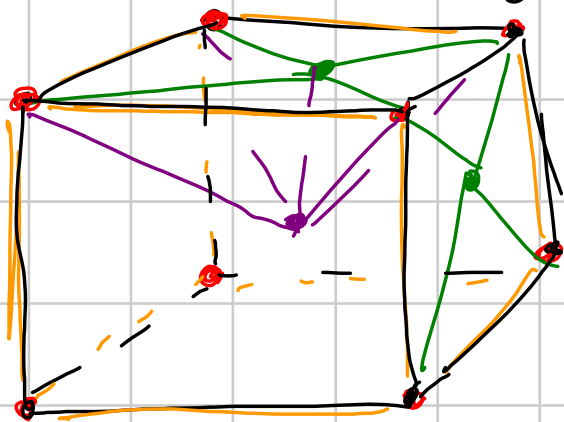
gli fatti

$K \leadsto L$ ricorsivamente su dimensione:
Parto da $V \subset L^{(0)}$, $V = K^{(0)}$

$L^{(m+1)}$ = i coni (e tutte le loro facce) da fissati
punti interni dei $\sigma \in K^{(m+1)}$ su

$$2\sigma \subset |K^{(m)}| = | \uparrow |$$

la parte m -dim
di L già costruita



1 2 3 4

In realtà: posso anche non appiungere vertici;
 parto da un ordinamento totale di $K^{(0)}$ e
 procedo induttivamente facendo il caso non $pt \in \text{int}(\sigma)$
 ma del vertice minimale:

