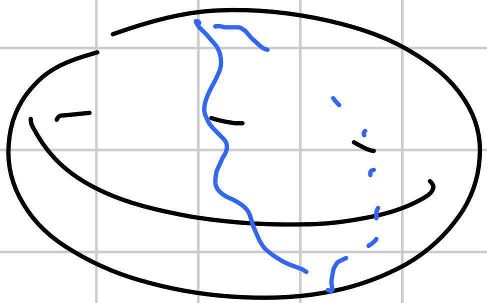
ETA 3/11/15

PB. JORDAN-SCHÖNFLIES:

$f: S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ TOP/PL/DIFF

E' vero che $S^n \setminus \mathrm{Im}(f) = B_\pm$

con $\overline{B_\pm} = D^n$, $\partial B_\pm = \mathrm{Im}(f)$?



<u>Fatti</u>: vero per $n=2$ TOP

vero per $n=3$ PL/DIFF

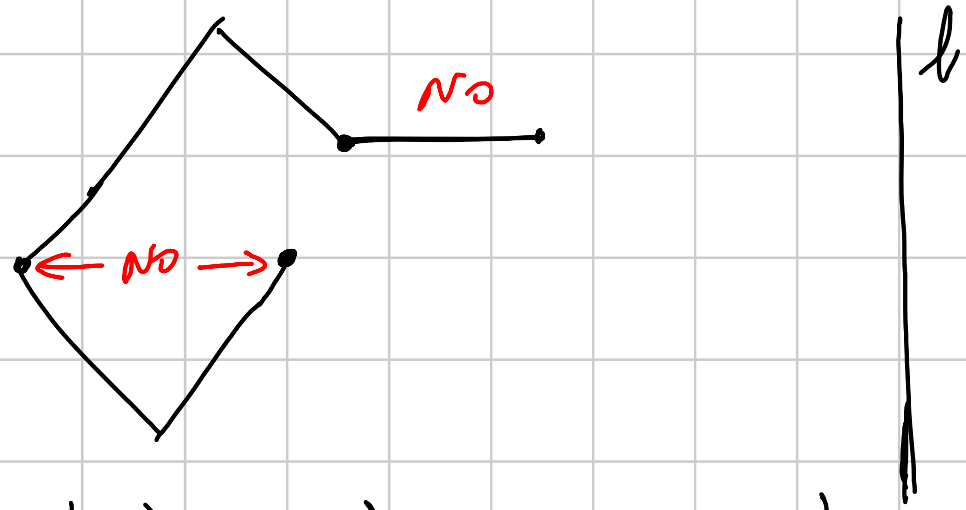
TOP no: Alexander's horned sphere

Faccio dimo PL/DIFF per $n=2$.

<u>Prop</u>: $\gamma : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ PL allora $\Gamma = \operatorname{Im}(\gamma)$ è ∂D con $\overline{D} \cong \Delta$, $\partial D = \Gamma$.

<u>Dim</u>: prendo una proiez. ortog. $\pi : \mathbb{R}^2 \to \ell$
che sia generica per Γ:

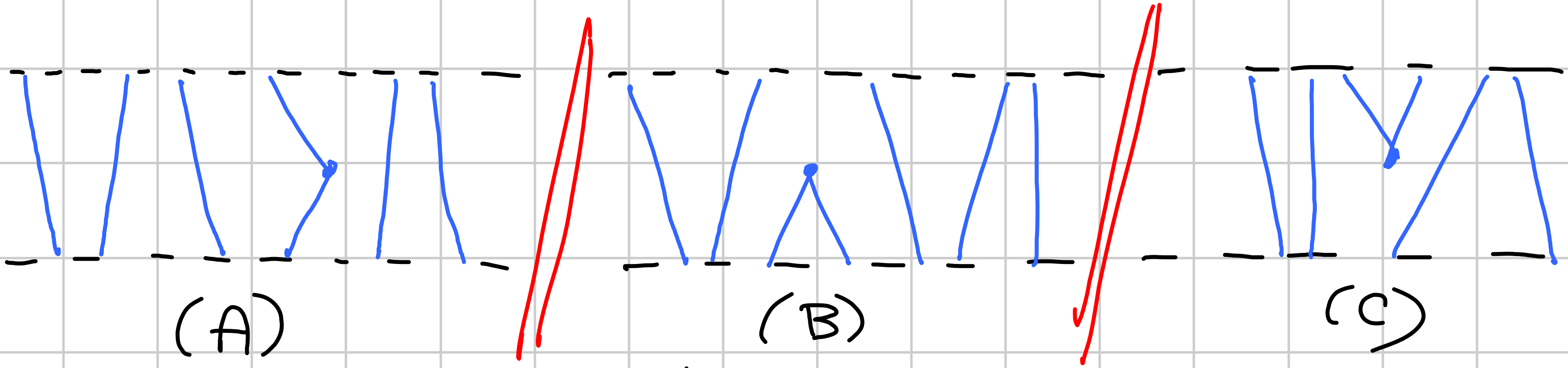
- π (lato) = segmento
- π (vertici distinti) = pti distinti.



Se $\pi(\text{vertici}) = \{ y_1 < \ldots < y_n \}$

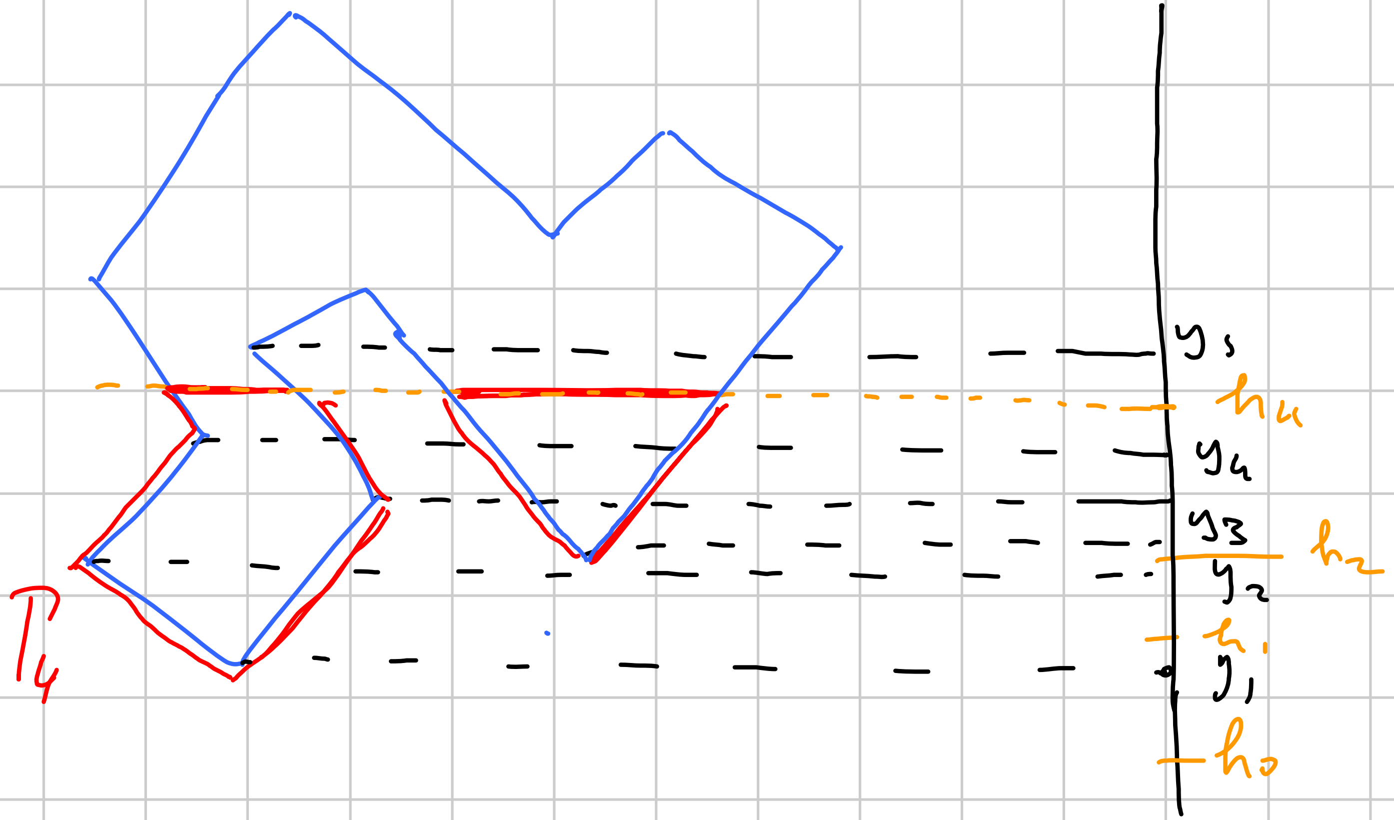
prendo $h_0 < y_1 < h_1 < \dots < h_{N-1} < y_N < h_N$.

Oss: $\pi^{-1}([h_{j-1}, h_j])$ è



ne segue che $\# \pi^{-1}(h_i) \bmod 2$ non cambia per $i = j-1, j$

Poiché $\pi^{-1}(h_0) = \emptyset$ ho $\# \pi^{-1}(h_j)$ è pari $\forall j$



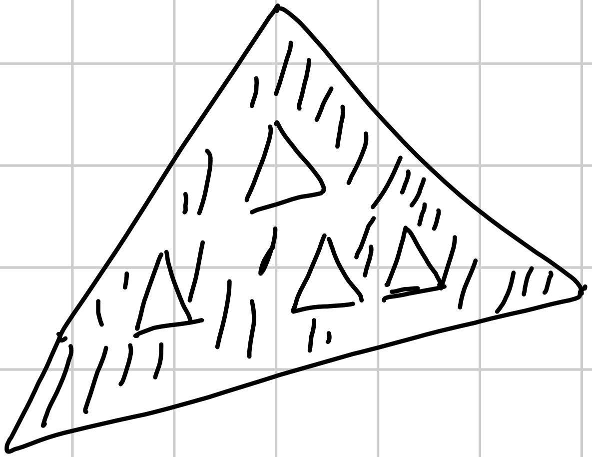
$$T_j = \left(\pi^{-1}([h_0, h_j]) \cap T\right)$$ $\cup$ segmenti orizz. su $\pi^{-1}(h_j)$ che uniscono i punti L_i

$T \cap \pi^{-1}(h_j)$

$1^\circ - 2^\circ,\ 3^\circ - 4^\circ, \ldots$

Provo per induzione su j che T_j è bordo di una famiglia finita di dischi bucati

(PL-omeo a



).

Alla fine $T = T_N$ è bordo di fam. finita di dischi bucati, ma $T \cong S^1$

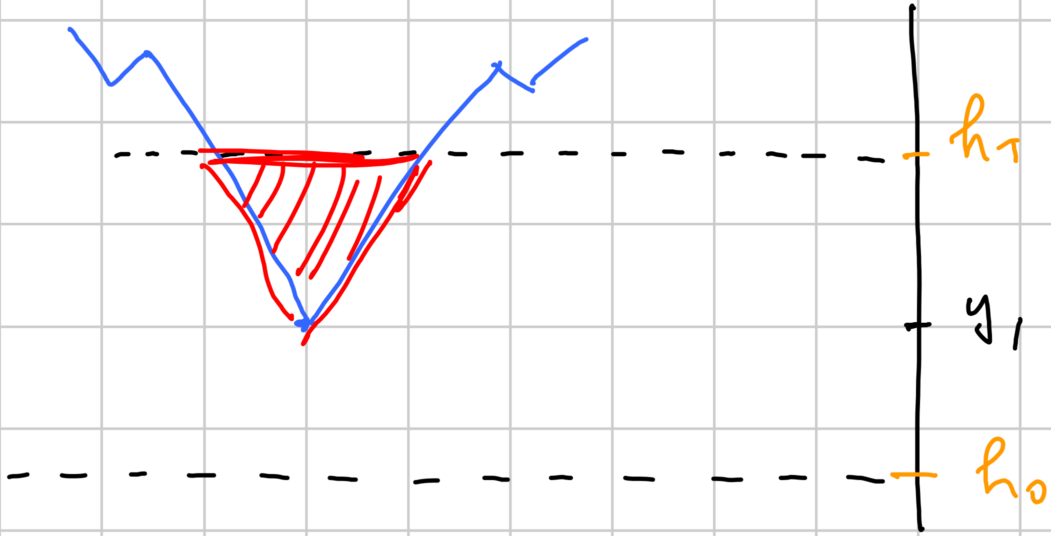
$\Longrightarrow$ la famiglia consiste di un solo disco non bucato $\Longrightarrow$ tesi.

(in realtà di buchi non ce n'è mai stati

).

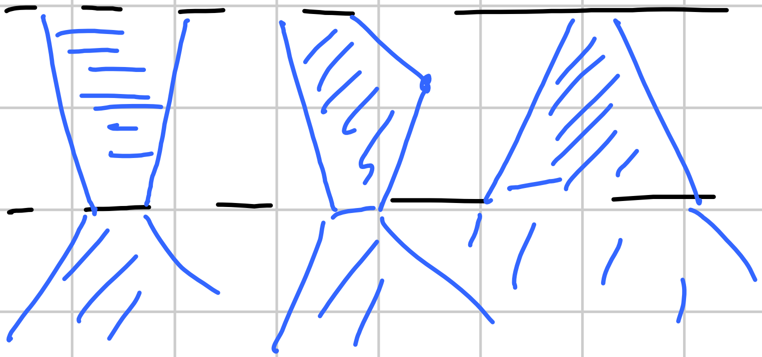
Passo base : $\Gamma_0 = \emptyset = \partial \emptyset$ . . .

Γ_1 :



Passo induttivo.

(A)



so che sono distribuiti.

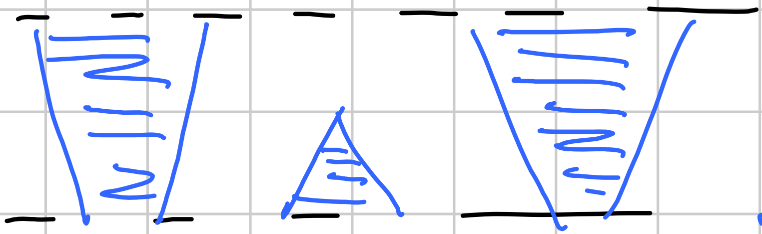
come prima

(B1)

ho dischi bucati

o un disco in meno con somme buchi prime o un buco in più

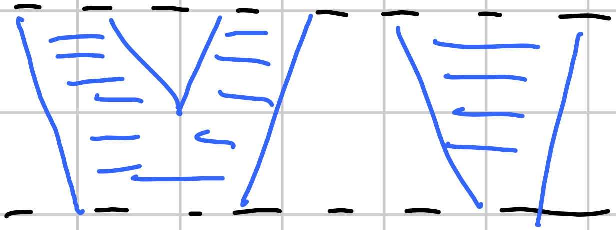
(B2)



ho dischi bucati

come prima

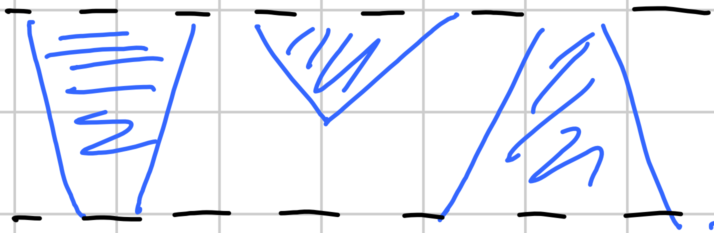
(C1)



dischi bucati

come prima

(C2)



dischi bucati

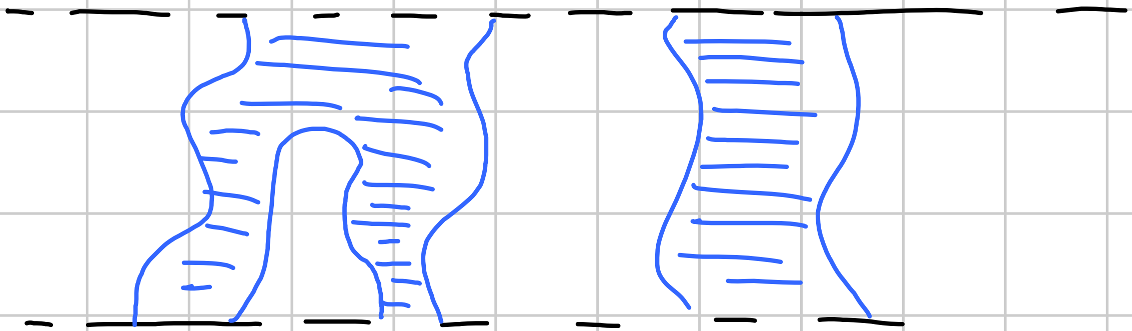
un disco in più

∎

Versione DIFF : $\gamma : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ DIFF

scelgo generica $\pi : \mathbb{R}^2 \to \ell$ t.c.

- gli unici punti critici per $\pi \circ \gamma$ sono max o min loc
- altezze diverse



<u>Teo</u>: $\mathbb{R}^n \not\cong_{Top} \mathbb{R}^m \quad n < m.$

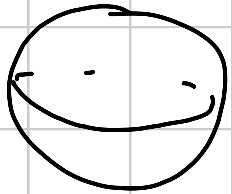
<u>Pf</u>: Se si $\quad \mathbb{R}^n \setminus pt \cong \mathbb{R}^m \setminus pt$

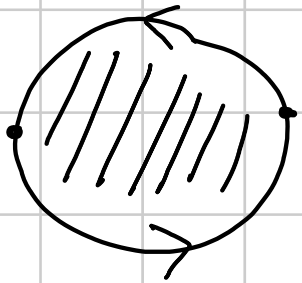
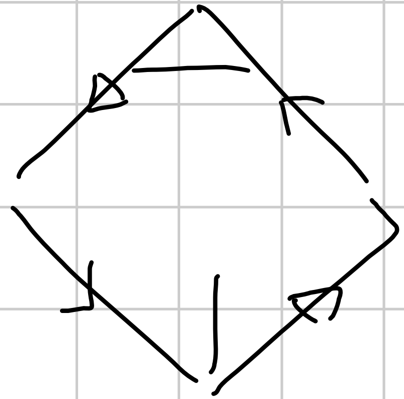
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \setminus pt & \cong & \mathbb{R}^m \setminus pt \\ \wr\!\! \mid & & \wr\!\! \mid \\ S^{n-1} & \simeq & S^{m-1} \end{array}$$

$H_{m-1}(S^{n-1}) = 0$

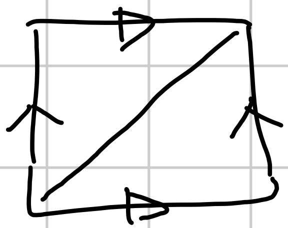
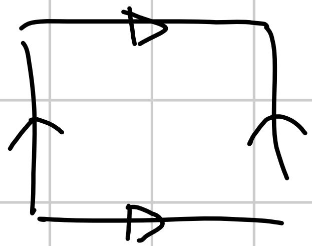
$H_{m-1}(S^{m-1}) = \mathbb{Z}$ $\quad \blacksquare$

CLASSIFICAZIONE (PL) DELLE SUPERFICI CONNESSE CHIUSE/CPT.

Es: $S^2 =$  $= \partial \Delta_3$

$\mathbb{P}^2 =$  $=$ 

molto suddiviso

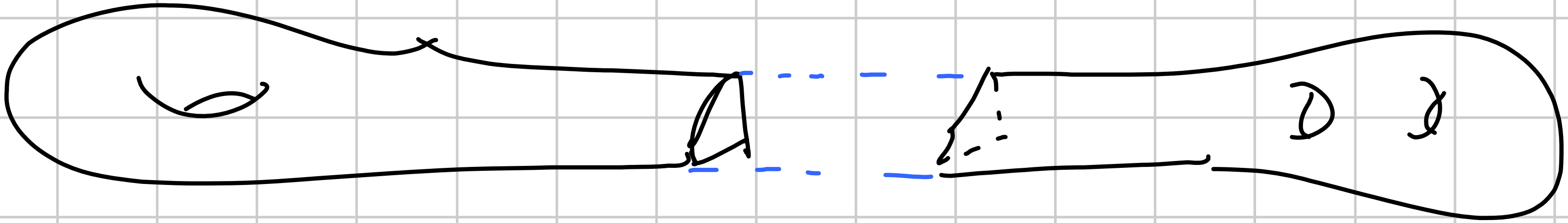
$T =$  $=$  molto suddiviso

Def: Se $\Sigma_{1,2}$ sono sup. PL chiuse prendo $\Delta_j \in \Sigma_j^{[2]}$ e $f : \partial\Delta_2 \to \partial\Delta_1$ omeo simpliciale

$$\Sigma_1 \# \Sigma_2 = \left(\Sigma_1 \setminus \Delta_1\right) \cup_f \left(\Sigma_2 \setminus \Delta_2\right)$$

Somma connessa

$$\left(|\Sigma_1| \setminus \mathrm{int}(\Delta_1)\right)$$



Teo: $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ è ben def. e ogni sup. PL chiusa è PL omeo a una e una sola di:

$$k \cdot T = \underbrace{T \# \dots \# T}_{k \text{ volte}} \quad (S^2 \text{ per } k=0)$$

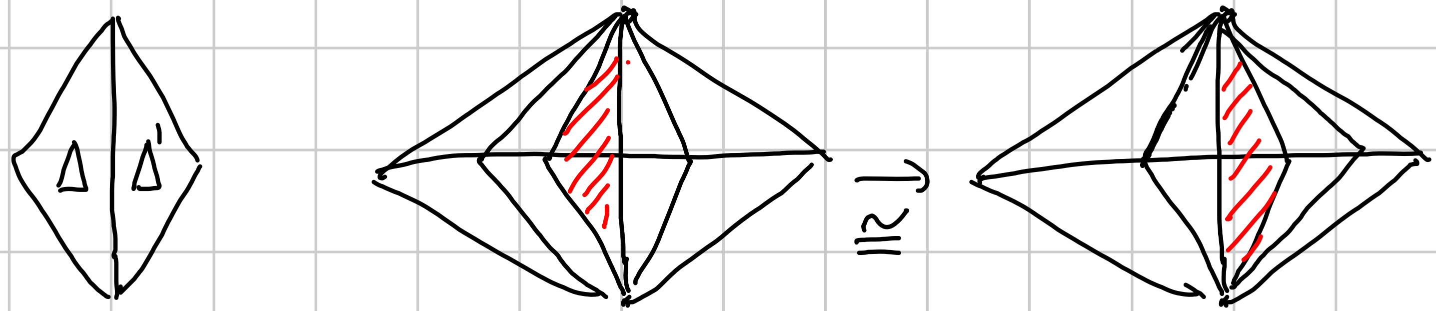
$$k \cdot \mathbb{P}^2 \quad (k \geq 1)$$

Dim: (•) # indip. da Δ_1, Δ_2 –

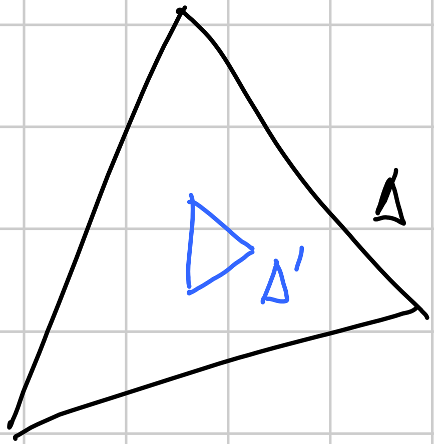
Segue da: dati $\Delta, \Delta' \subset \Sigma$ $\exists\, h : \Sigma \to \Sigma$ t.c. $h(\Delta) = \Delta'$

Nota: può essere che Δ, Δ' siano in triang. diverse.

Se sono nella stessa: basta vedere per Δ, Δ' adiacenti:



Se no: basta vedere che per $\alpha < \lambda$
e $\Delta' \subset \Delta$

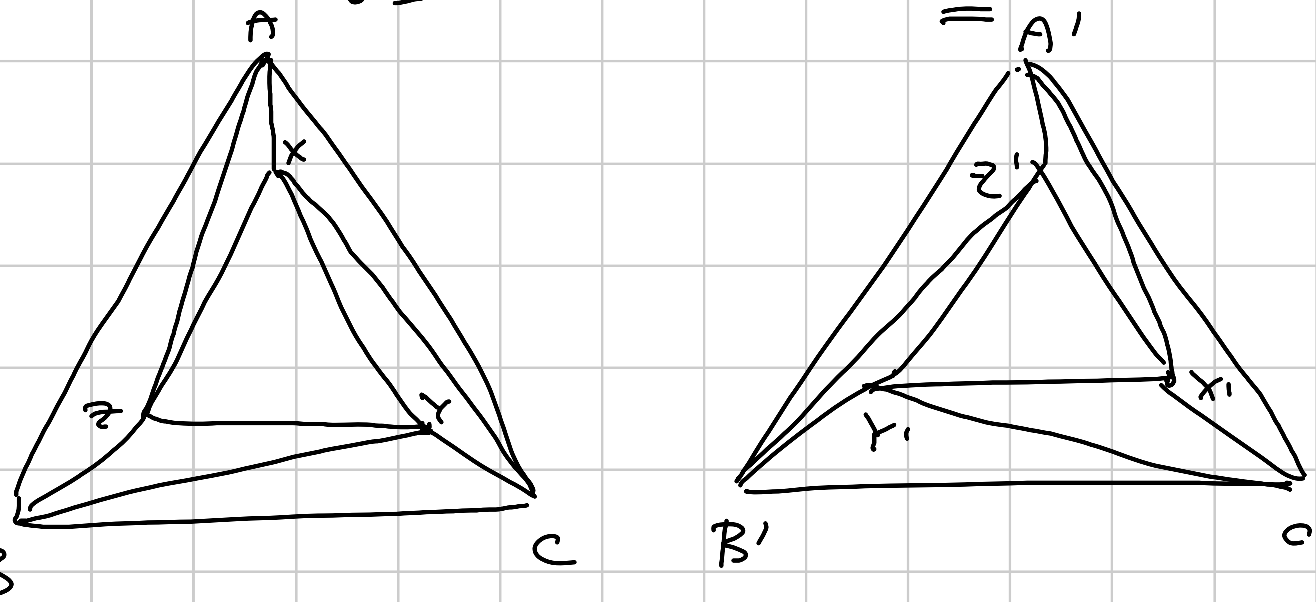


(•) # indip de $f : \partial\Delta_2 \to \partial\Delta_1$
a meno di pre/post comporre con
$g : \partial\Delta_j \to \partial\Delta_j$ che preserva orient.

Basta vedere che se $\Delta \subset \Sigma$

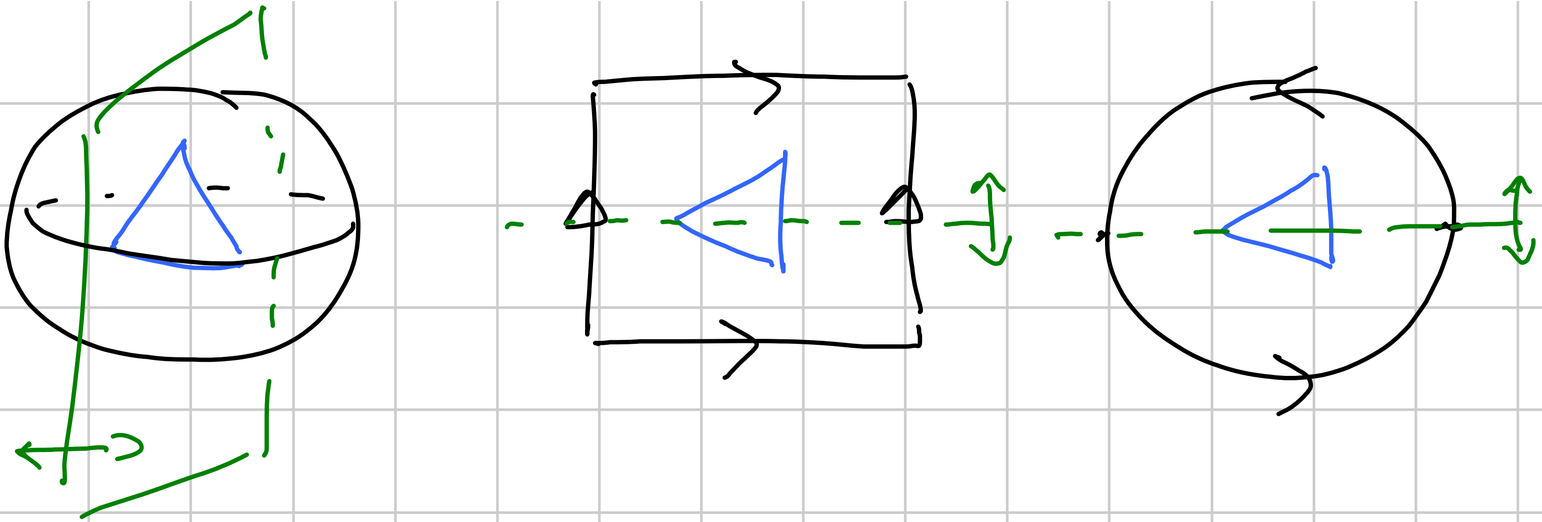
$g : \partial\Delta \to \partial\Delta$ che preserva l'orientazione

ho $g = h|_{\partial\Delta}$, $h : \Sigma \xrightarrow{\cong} \Sigma$.



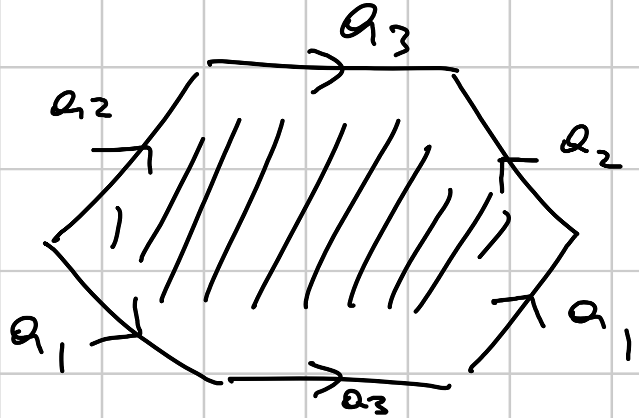
ATT: per $n \geq 3$ è falso che $\Sigma_1 \#_f \Sigma_2$ è indip da f (ci sono due casi al più).

(•) Completa indip. da f: segue dal fatto (da provare) che ogni Σ è $k \cdot T$ o $k \cdot \mathbb{P}^2$ e ivi è vero che $g : \partial\Delta \to \partial\Delta$ che inverte orientaz. è $g = h|_{\partial\Delta}$, $h : \Sigma \to \Sigma$.



(•) Se w è una parola nei simboli $a_1^{\pm 1}, \dots, a_p^{\pm 1}$ in cui a_i^* compare esattamente due volte allora w definisce una sup. PL chiusa: quoziente del $2p$-agono rispetto a . . w

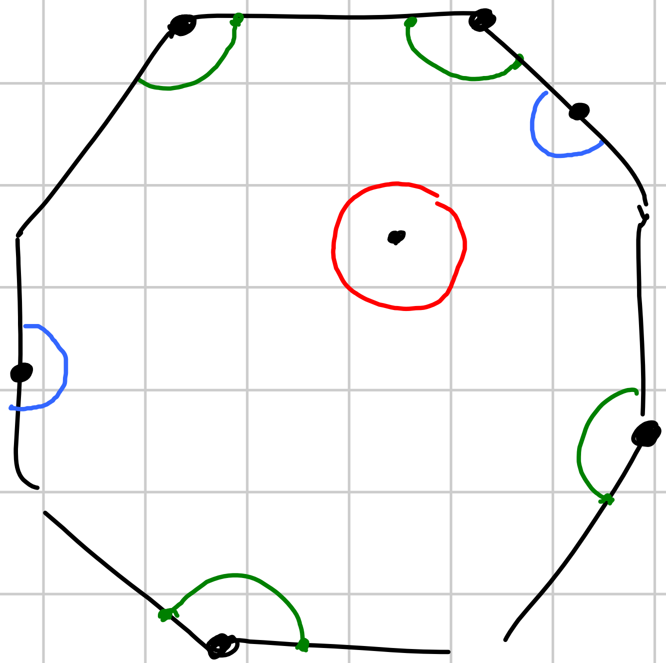
$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3^{-1} \cdot a_2^{-1} \cdot a_1 \cdot a_3$



struttura PL : suddivido molto

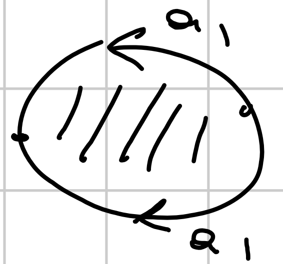
2-varietà PL :

link:

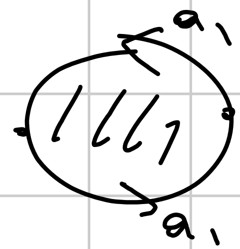


sempre S^1 .

$p=1$ prendo lati curvi

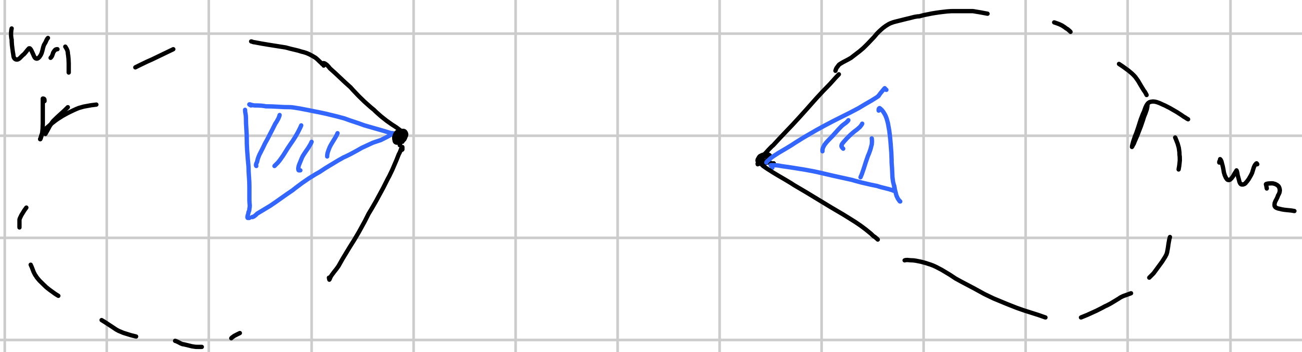


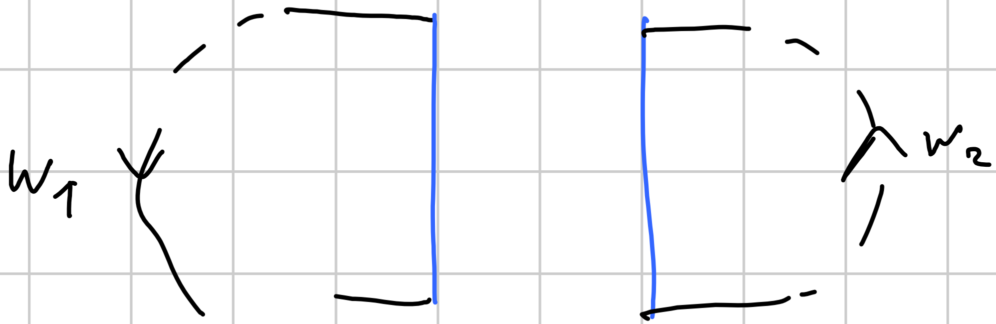
$= S^2$

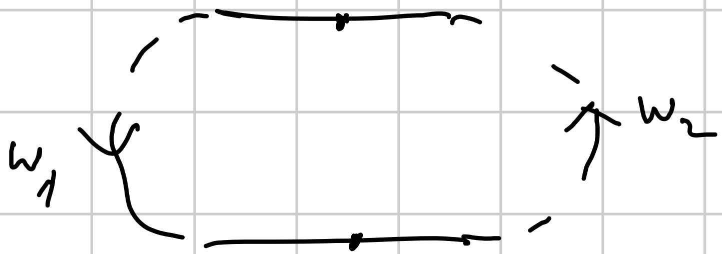


$= \mathbb{P}^2$

(•) Se w_j definisce Σ_j, $j = 1,2$ allora $w_1 \cdot w_2$ definisce $\Sigma_1 \# \Sigma_2$.





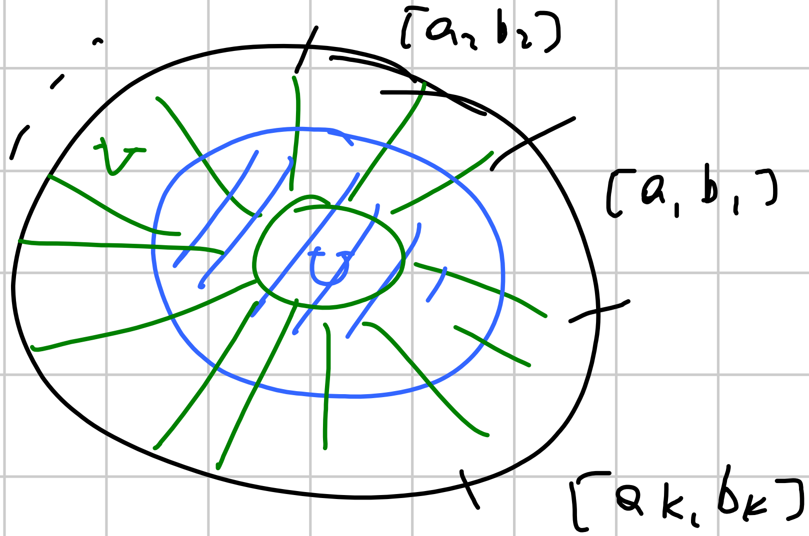


$kT \leftrightarrow a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$

$k\mathbb{P}^2 \longleftrightarrow a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \; \dots \; \cdot a_k^2$

$(\bullet)$ La liste non ha ripetizioni :

$\pi_1(kT) =$



$= \langle a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \mid \prod [a_j, b_j] \rangle$

$$\Longrightarrow H_1(kT) = \langle a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \mid [\,,\,] \rangle$$
$$= \mathbb{Z}^{2k}$$

$$\pi_1(k\mathbb{P}^2) = \langle a_1, \dots, a_k \mid a_1^2 \cdot \ldots \cdot a_k^2 \rangle$$

$$H_1(k\mathbb{P}^2) = \langle a_1, \dots, a_k \mid a_1^2 \cdot \ldots \cdot a_k^2, \ [a_i, a_j] \rangle$$

$$= \mathbb{Z}^k / \langle (2, \dots, 2) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2$$

CONCLUSIONE: Parto da w parola ammissibile e la semplifico finché non diventa o

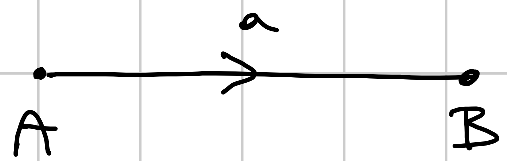
$a_1 a_1^{-1}$, $[a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_k, b_k]$, $a_1^2 \cdots a_k^2$.

Strategia: si semplifica a tappe verificando che a ogni tappa non si rovinano le precedenti.

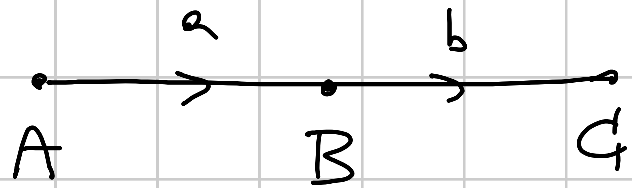
TAPPA 1: mi riduco al caso in cui tutti i vertici del poligono sono identificati tra loro dagli accoppiamenti fra lati definiti da w.

$$\Sigma = P/w$$

Supponiamo che due vertici di P si proiettino in vertici A, B distinti di Σ. Etichetto ogni vertice di P tramite suo quoziente.
Esiste lato di P con estremi A, B.

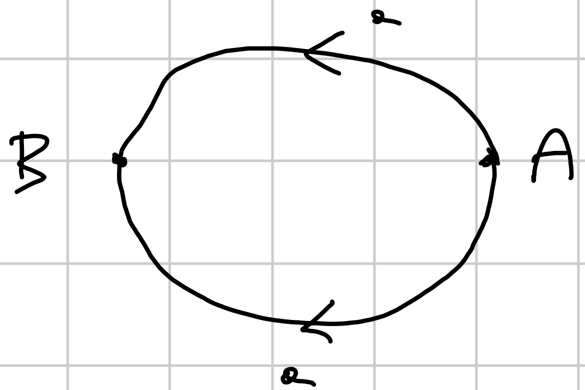


Guardo il lato successivo:



Casi:

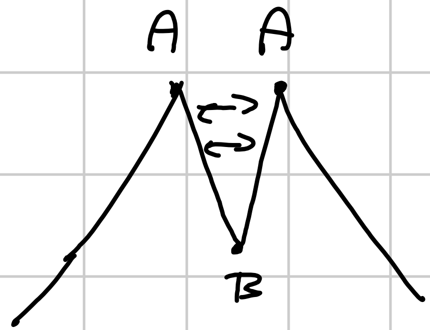
- $b = a \implies A = B$ No
- $b = a^{-1}$



$= S^2$ OK

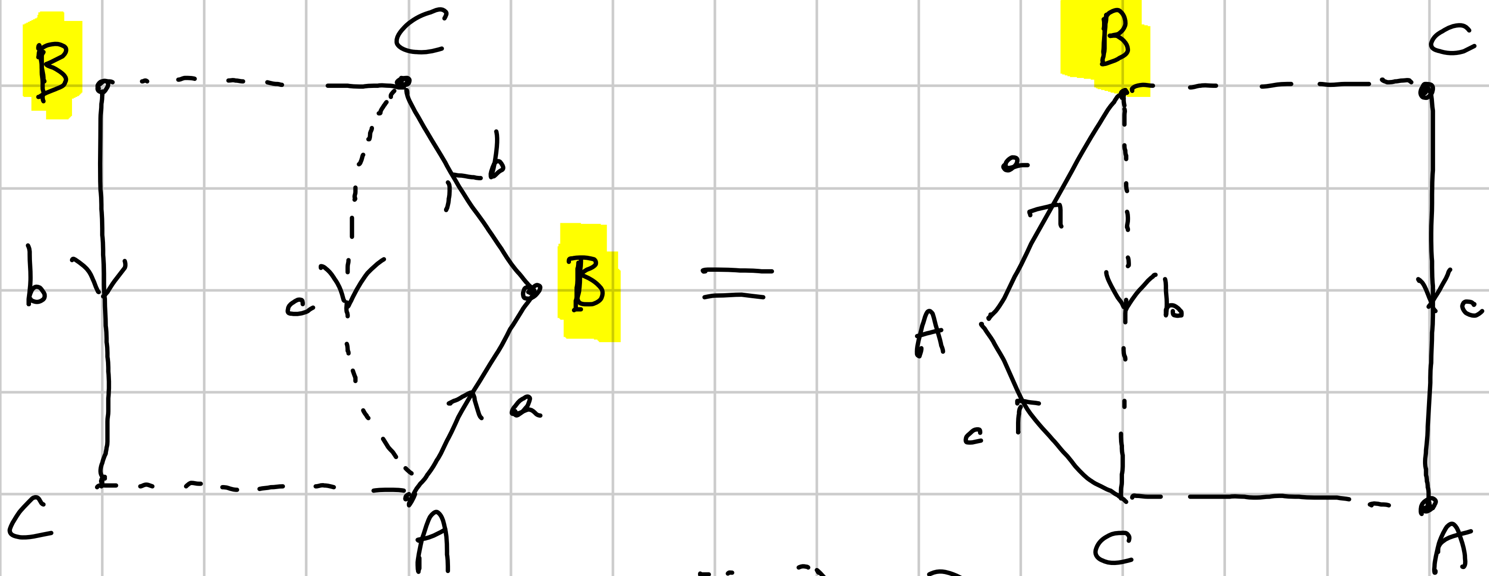
oppure

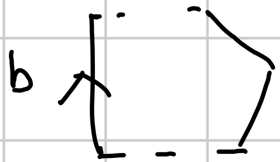
$\rightarrow$



ed elimino B.

• $b \neq a^{\pm 1}$



(stesso se 

)

Ho diminuito di 1 le occorrenze di B su ∂P.

Itero fino a scoprire che è S^2 o eliminare B.

Itero ancora finché Σ ha un solo vertice.