

ETA 1/12/15

$$C_m^{\text{sing}}(X) = \langle \{ \sigma : \Delta_m \rightarrow X : \sigma \text{ cont.} \} \rangle$$

$$\partial_m^{\text{sing}} \sigma = \sum_{i=0}^m (-1)^i \sigma \circ \varphi_i^{(m)} \Rightarrow H_*^{\text{sing}}(X)$$

$f : X \rightarrow Y$ cont. induce f_*

$$f_0 \simeq f_1 \Rightarrow f_{0*} = f_{1*}.$$

Homologie relative: $C_n(X, A) = C_n(X) / C_n(A)$

∂_n^X induce $\partial_n^{(X, A)} \Rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, A)$

$$0 \rightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_n} C_n(X) \xrightarrow{p_n} C_n(X, A) \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ LES

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sing}}(A) \xrightarrow{i_{n*}} H_n^{\text{sing}}(X) \xrightarrow{p_{n*}} H_n^{\text{sing}}(X, A) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}^{\text{sing}}(A) \rightarrow \dots$$

//

$$\frac{\{z \in C_n(X) : \partial_n z \in C_{n-1}(A)\}}{\{w + \partial y : w \in C_n(A), y \in C_{n+1}(X)\}}$$

$$d_n([z]) \mapsto [\partial_n z]$$

$$f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B) \quad \text{homotopy in site}$$

$$F : (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B)$$

$$F(\cdot, 0) = f_0, \quad F(\cdot, 1) = f_1$$

$$\text{Fatto: } f_0 \simeq f_1 \implies f_{0*} = f_{1*} -$$

Serve omotopia algebrica tra $f_0 \#$ e $f_1 \#$

$$F_n^{(X,A)}: C_n(X,A) \rightarrow C_{n+1}(Y,B)$$

Abbiamo costruito $F_n^X: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$

per costruzione $F_n^X(C_n(A)) \subset C_{n+1}(B)$

quindi F_n^X induce $F_n^{(X,A)}$
—

Altra proprietà: Successione esatta delle forme
 $A \subset B \subset X$

$$0 \rightarrow C_n(B, A) \rightarrow C_n(X, A) \rightarrow C_n(X, B) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \dots \rightarrow H_n(B, A) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_{n-1}(B, A) \rightarrow \dots$$

indotte
della incl

$$H_n(X, B) \rightarrow H_{n-1}(B) \rightarrow H_{n-1}(B, A)$$

$\swarrow$ $LES(X, B)$
 $\nwarrow$ $LES(B, A)$

Escissione :

Thm: $Z \subset A \subset X$, $\overline{Z} \subset \text{int}(A)$
 $\implies (X \setminus \overline{Z}, A \setminus \overline{Z}) \hookrightarrow (X, A)$
induce isomorfismo in H_*^{sing}

(Dimo poi.)

Prop: $X = T \cup W$, X c.s. T, W sottocompl, $Y = T \cap W$
 $\Rightarrow H_x^{\text{SING}}(X, T) \cong H_x^{\text{SING}}(W, Y)$ -

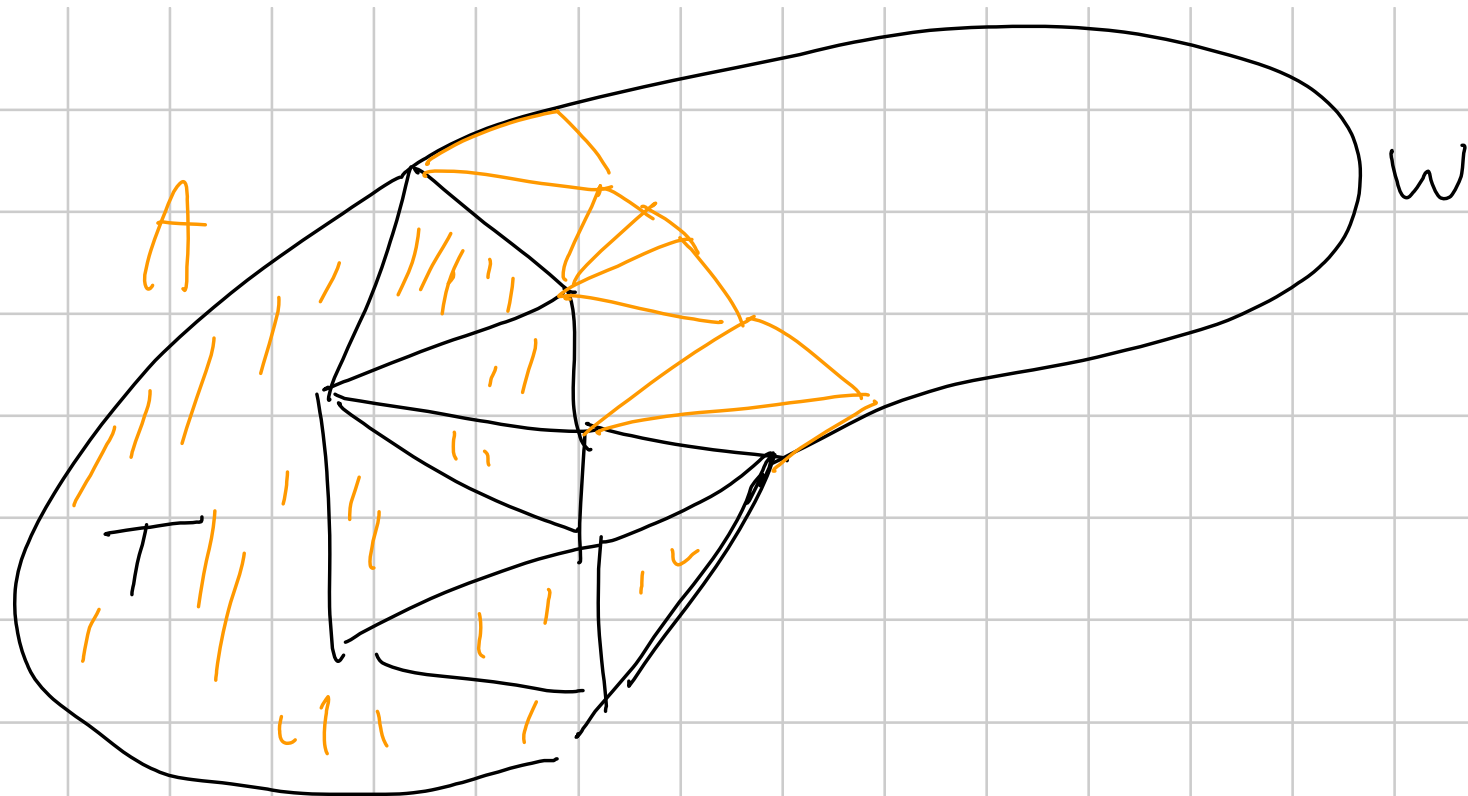
Dim: prendo una suddivisione $\mathcal{H}$ di X
 abbastanza fine e definisco

$$A = \bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{H} \\ \sigma \cap T \neq \emptyset}} \sigma$$

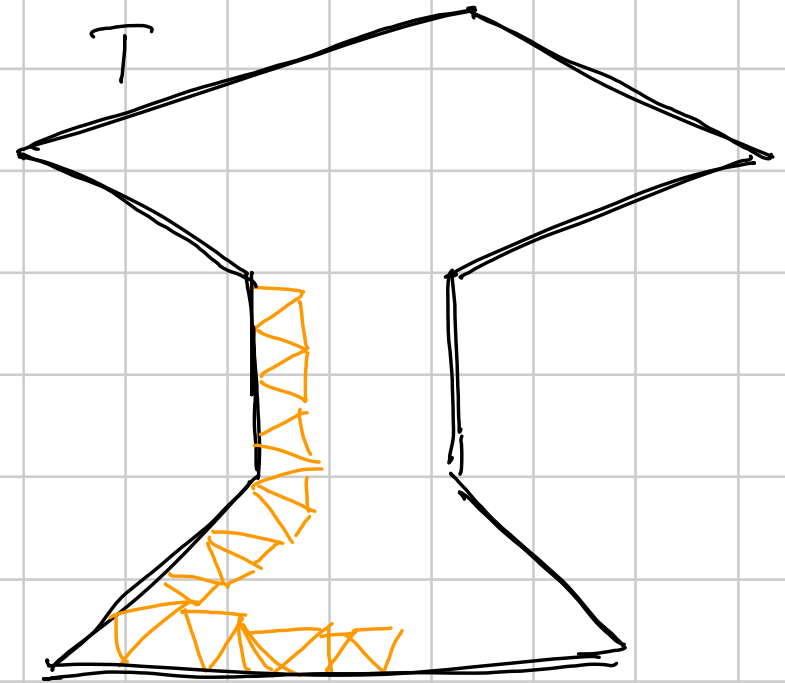
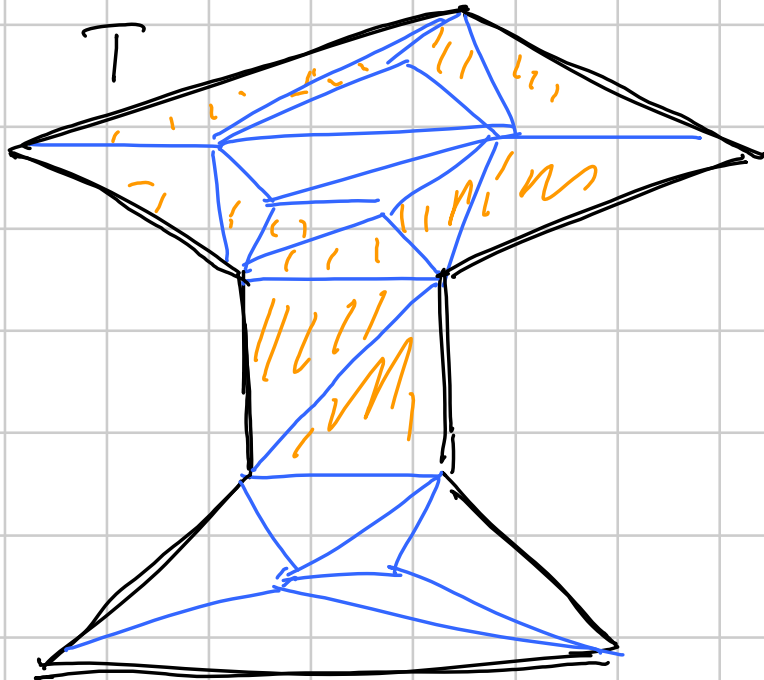
Fatti: • $T \subset \text{int}(A)$

• A si retrae su T (facile e sempre vero
 (vero per il fine))





Att: falso senza suddividere;



$$\Rightarrow (X, A) \cong (X, \bar{A}).$$



Per restriction

$$(W, A \setminus (T \cap Y)) \cong (W, Y)$$

$$H_n^{\text{SING}}(X, T) \underset{\text{omotop}}{\cong} H_n^{\text{SING}}(X, A) \underset{\text{excision}}{\cong} H_n^{\text{SING}}(X \setminus (T \setminus Y), A \setminus (T \setminus Y))$$

$$\parallel$$

$$H_n^{\text{SING}}(W, A \setminus (T \setminus Y))$$

$$\parallel \text{omotop}$$

$$H_n^{\text{SING}}(W, Y) -$$



Con: per coppie simpliciali (X, A) si ha un isomorfismo naturale

$$H_*^{\text{SIMPL}}(X, A) \longrightarrow H_*^{\text{SING}}(X, A) -$$

La transf. naturale che è isomorf. in grado 0 è la mappa che si ottiene parametrizzando i simplici di X prestando un ord. tot. dei vertici.

Con: per Δ -coppia $H_*^{\Delta}(X, A) \cong H_*^{\text{SING}}(X, A) -$

Prop: sia X sp. top., $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ t.c.
 $\bigcup \{U : U \in \mathcal{U}\} = X$.

$$C_n^{\mathcal{U}}(X) := \left\{ \sum m_{\sigma} \cdot \sigma : \sigma : \Delta_n \rightarrow X \right. \\ \left. \forall \sigma \exists U \in \mathcal{U} \text{ t.c. } \text{Im}(\sigma) \subset U \right\}$$

Nota che ∂_n induce $\partial_n^{\mathcal{U}} \Rightarrow H_*^{\mathcal{U}}(X)$.

Allora: l'inclusione naturale $i_n : C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$
è equiv. omotopica di complessi di catene, cioè
 $\exists p_n : C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$ t.c.

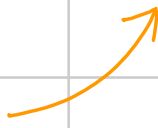
$$i \circ p \simeq \text{id}_{C(X)}$$

$$p \circ i \simeq \text{id}_{C^u(X)}$$

(omotopie come mappe da un complesso di catene in $\mathbb{R}$
 — omotopie algebriche con quoziente primo) —

Con: c'è un isomorfismo naturale $H_n^u(X) \cong H_n(X)$.

Lem: $\sigma \in \mathbb{R}^n$ n -simpl $\Rightarrow \text{diam}(\sigma') \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma)$ —

max diam 

suddiv. bari 

Dim: $\eta \in \sigma' \Rightarrow \eta = \text{Conv}(c(\tau_0), c(\tau_1), \dots, c(\tau_k))$

$$\tau_0 \subset \tau_1 \subset \dots \subset \tau_k$$

Se $\sigma = \text{Conv}(v_0, \dots, v_m)$ e meno dell'ordine ho

$$(v_0) \subset (v_0, v_1) \subset (v_0, v_1, v_2) \subset \dots \subset (v_0, v_1, v_2, \dots, v_m)$$

$$\eta \subset \text{Conv}(c(v_0), c(v_0, v_1), c(v_0, v_1, v_2), \dots, c(v_0, v_1, \dots, v_m))$$

↑
Basta provare che qui ho diam $\leq \frac{M}{n+1}$ diam σ .

Osservo: $\text{diam}(\text{shp}(c)) = \|w_1 - w_0\|$

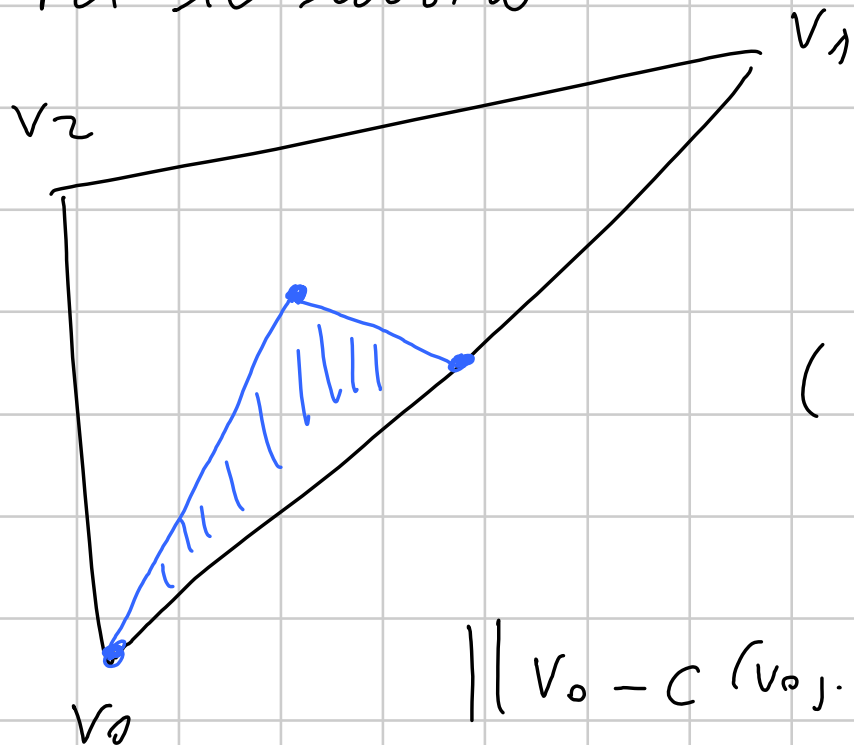
$\nwarrow \nearrow$
 vertici

Per il nostro

provo che

$$\|v_0 - c(v_0, \dots, v_m)\| \leq \frac{m}{m+1} \cdot \text{diam}(\sigma)$$

(se non è lei a dare il max
impossibile)



$$\|v_0 - c(v_0, \dots, v_m)\| = \left\| v_0 - \sum_{i=0}^m \frac{v_i}{m+1} \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=0}^n \frac{v_0 - v_i}{n+1} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{v_0 - v_i}{n+1} \right\|$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \cdot n \cdot \text{diam}(\sigma) \quad \square$$

Con: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \text{ t.c. } \text{diam}(\sigma^{(k)}) < \varepsilon$

Dêmo (Prop): $i_n: C_n^u(X) \rightarrow C_n(X)$
cerchiamo $p_n: C_n(X) \rightarrow C_n^u(X)$ e

$$\begin{array}{ccccc}
 & C_m(X) & \xrightarrow{\partial_m} & C_{m-1}(X) & \\
 \bar{E}_m \swarrow & \downarrow i_m \circ p_m & \text{---} & \downarrow \text{id}_{C_m(X)} & \searrow \bar{E}_{m-1} \\
 C_{m+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{m+1}} & C_m(X) & &
 \end{array}$$

$\partial_{m+1} \circ \bar{E}_{m+1} - \bar{E}_{m-1} \circ \partial_m$
 $= i_m \circ p_m - \text{id}_{C_m(X)}$

e

$$C_m^u(X) \xrightarrow{i_m} C_m(X) \xrightarrow{p_m} C_m^u(X)$$

$$p_m \circ i_m = \text{id}_{C_m^u(X)}$$

Scrivo $D_m = \sum \delta_i$ $\delta_i : \Delta_m \rightarrow \Delta_m$ $i = 0, \dots, m$

sono mappe che parametrizzano gli
 m -simplex di Δ_m

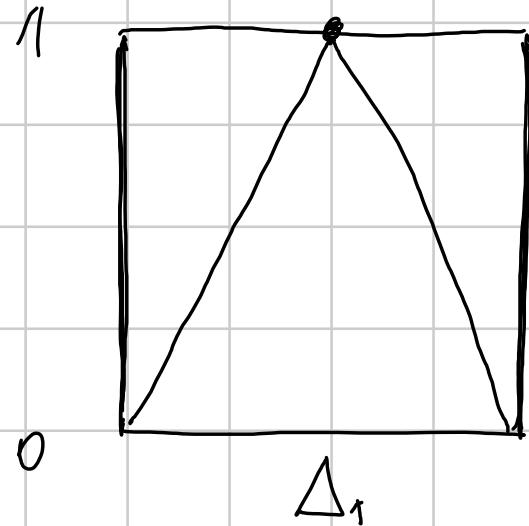
$E_m = \sum \varepsilon_i$ definite ricorsivamente in modo che
 $\varepsilon_i : \Delta_{m+1} \rightarrow \Delta_m \times [0, 1]$

parametrizzano la triangolazione di $\Delta_m \times [0, 1]$
 ottenuta facendo il cono su $E_{m-1}(\partial \Delta_m)$
 $\cup \{ \Delta_m \times \{0\} \}$



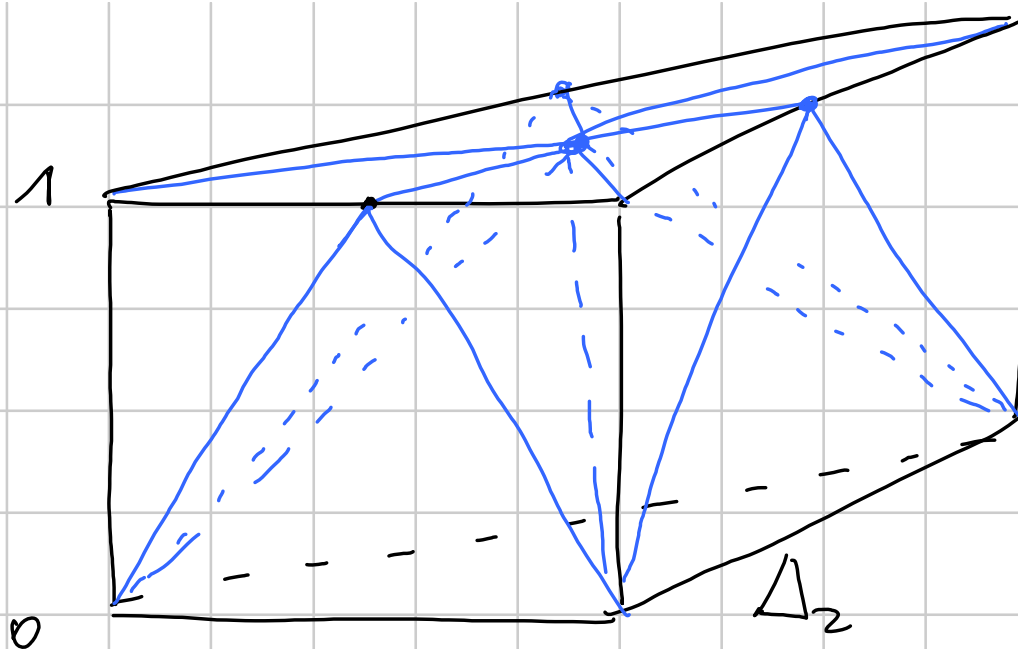
$E_1 = \text{segmento vertice}$

$m=1$



$E_2 = \sum \text{parametri d'}$
 questi 3 triangoli.

$m=2$



$E_3 =$ somma
di parametrità.
di questi 10
tetraedri -

Per costruzione $D_{m+1}(E_m(\Delta_m)) = D_m(\Delta_m) + E_{m-1}(\partial\Delta_m) - \Delta_m$

Formalmente: $D_m: C_m(X) \rightarrow C_m(X) \quad \sigma \mapsto \sum \sigma \circ \delta_i$

$$E_m : C_m(X) \rightarrow C_{m+1}(X) \quad \sigma \mapsto \sum (\sigma \text{id}_{[0,1]}) \circ \sigma_i$$

Scaplicando bene σ_i, ε_i si ottiene

$$\partial_{m+1} \circ E_m = E_{m-1} \circ \partial_m + D_m - \text{id}_{C_m(X)}$$

cioè $(E_m)_{m \rightarrow \infty}^{+\infty}$ è omotopia algebrica tra D e $\text{id}_{C(X)}$ -

Affermo che
$$E_m^{(k)} := \sum_{h=0}^{k-1} E_m \circ D_m^h$$

è omotopia algebrica tra D^k e $\text{id}_{C(X)}$ -
 $k=1$ vero per costruzione - Per induzione ...

$$k=2$$

$$\underline{\text{So:}} \quad E_n^{(2)} = E_n \circ (D_n + \text{id}_{C_n(X)})$$

$$\partial_{n+1} \circ E_n - E_{n-1} \circ \partial_n = D_n - \text{id}_{C_n(X)}$$

$$\underline{\text{Vogliamo:}} \quad \underbrace{\partial_{n+1} \circ E_n^{(2)} - E_{n-1}^{(2)} \circ \partial_n}_{\text{}} = D_n^2 - \text{id}_{C_n(X)}$$

$$\underbrace{\partial_{n+1} \circ (E_n \circ (D_n + \text{id}_{C_n(X)}))}_{\text{}} - E_{n-1} \circ (D_{n-1} + \text{id}_{C_{n-1}(X)}) \circ \partial_n$$

$$E_{n-1} \circ \partial_n + D_n - \text{id}_{C_n(X)}$$

$$= \cancel{E_{n-1} \circ \partial_n \circ D_n} + \cancel{E_{n-1} \circ \partial_n} + D_n^2 + \cancel{D_n} - \cancel{D_n} - \text{id}_{C_n(X)} \\ - \cancel{E_{n-1} \circ D_{n-1} \circ \partial_n} - \cancel{E_{n-1} \circ \partial_n}$$

X

$$\partial_m \circ D_m = D_{m-1} \circ \partial_m$$

$$(D : C(X) \rightarrow C(X))$$

mappe tra compl. di
catene)



la suddiv. bari del bordo $\bar{}$ il bordo della suddiv. bari

RHS

LHS

Diamo per provato che $E^{(k)}$ è omotop. tra D^k e $\text{id}_{C(X)}$ -

Abbiamo $i_m : C_m^u(X) \rightarrow C_m(X)$

cerchiamo $p_n: C_n^1(X) \rightarrow C_n^u(X)$.

Per il Lemma $\text{diam}(\Delta_n^k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$

$\Rightarrow \forall \sigma: \Delta_n \rightarrow X$ continue esiste $k(\sigma) \in \mathbb{N}$ (univ.)
t.c. $D^{k(\sigma)}(\sigma) \in C_n^u(X)$

(formalmente: $\in i_n(C_n^u(X))$ — non scivo più i_n)

Definizione: $p_n: C_n^1(X) \rightarrow C_n^u(X)$
 $\sigma \mapsto D^{k(\sigma)}(\sigma)$

Verò è facile: $p_m \circ i_m = \text{id}_{G_m^u(X)}$
ma non è vero che

$$i_m \circ p_m \simeq \text{id}_{G_m(X)} \quad \text{ris. a } E_-$$

Invece: poupo

$$\begin{array}{ccc} \overline{E}_m : C_m(X) & \longrightarrow & C_{m+1}(X) \\ \sigma & \longmapsto & E_m^{(k(\sigma))}(\sigma) \end{array}$$

$$p_m : C_m(X) \longrightarrow C_m^u(X)$$

$$\sigma \longmapsto D_m^{k(\sigma)} \sigma + E_{m-1}^{(k(\sigma))}(\partial_m \sigma) - \overline{E}_{m-1}(\partial_m \sigma)$$

→ def $\overline{E}_m$ ricorsiva

→ pezzo aggiunto $\bar{e}$ non basterà per $\tau \subset \partial_m \sigma$

$E_{m-1}^{(k(\sigma))}$

lo suddivide $k(\sigma)$ volte

$\overline{E}_{m-1}$

lo suddivide (induttivamente) $k(\tau)$ volte

ma può essere $k(\tau) < k(\sigma)$

→ pezzo aggiunto $\bar{e}$ compare in $C_m^{\text{qu}}(X)$

Fatti (1) $\overline{E}$ $\bar{e}$ omotopia tra $i \circ p$ e $\text{id}_{C_1(X)}$

(2) $p \circ i = \text{id}_{C_1^u(X)}$ -