ETA 1/10/15

K compl. simpl $= \{$simplessi$\}$

- $\sigma \in K$, η faccia $\Rightarrow \eta \in K$
- $\sigma_1 \cap \sigma_2$ faccia di entrambi

$C_n(K) = \langle K^{[n]} \rangle$

K orientato

$$\partial_n \sigma = \sum_{\substack{\eta \subset \sigma \\ \text{faccia di codim } 1}} \varepsilon(\sigma, \eta) \cdot \eta$$

$\rightsquigarrow H_*(K)$

a meno di $\cong$ non dipende dalle orientazioni.

Teo: $H_*(K) = H_*(|K|)$

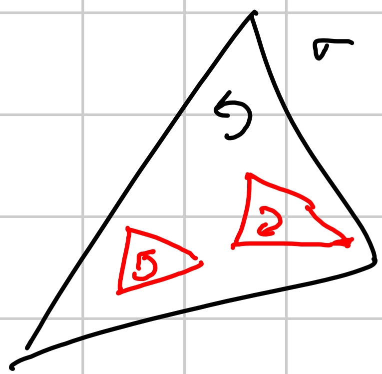
Strategia: 1. Def: $L < K$, L è suddivisione di K se $|L| = |K|$ e $\forall \tau \in L \ \exists \sigma \in K$ t.c. $\tau \subset \sigma$

2. Ogni $\sigma \in K^{[n]}$ è unione di $\tau \in L^{[n]}$

3. Definendo $C_n(K) \to C_n(L)$

$$\sigma \longmapsto \sum_{\tau \subset \sigma} \pm \tau$$

induce un isomorfismo in omologia.

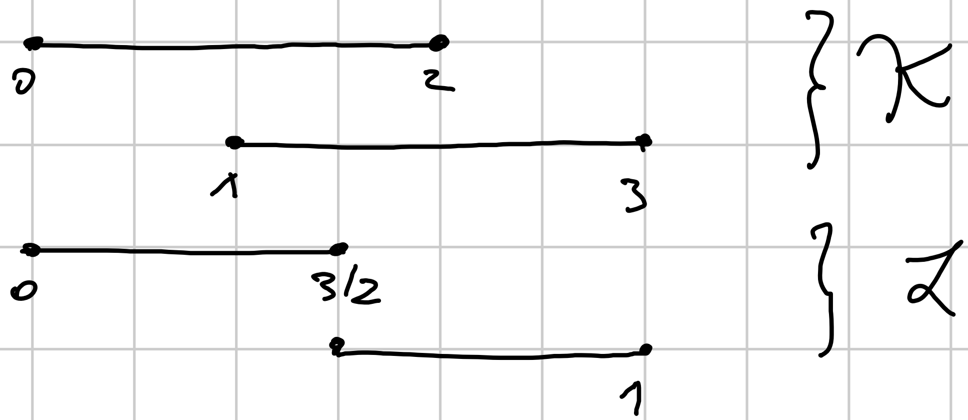


4. $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ t.c. $|\mathcal{K}_1| = |\mathcal{K}_2| \Rightarrow \exists\, \mathcal{L} < \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$.

———— o ————

② $\mathcal{L} < \mathcal{K} \Rightarrow$ ogni $\sigma \in \mathcal{K}^{[n]}$ è unione di $\tau \in \mathcal{L}^{[n]}$.

Non ovvio:



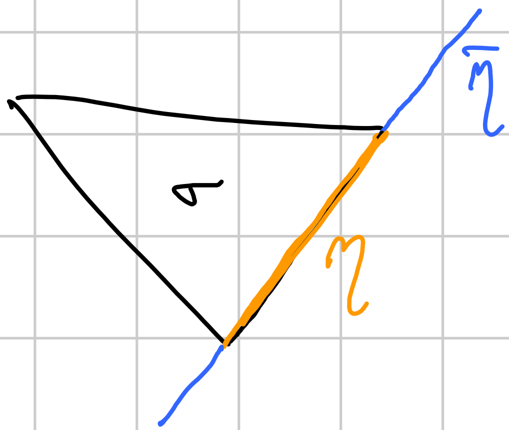
Lem 1: $\operatorname{int}(\sigma)$ è la parte interna topologica di σ in $\overline{\sigma}$.

Dim: Wlog $\overline{\sigma} = \mathbb{R}^n$, $\sigma = \operatorname{Conv}(0, e_1, \ldots, e_n)$.

$$\sigma = \left\{ (t_1, \ldots, t_n) \;:\; t_i \geq 0 ,\ \sum t_i = 1 \right\}$$

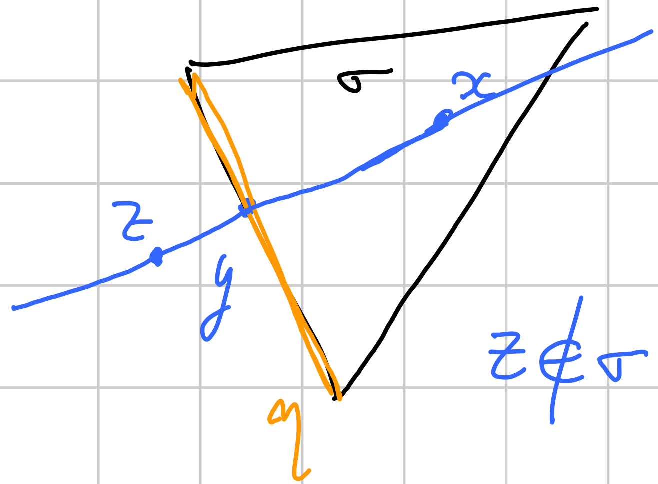
$$\operatorname{int}(\sigma) = \left\{ (t_1, \ldots, t_n) \;:\; t_i > 0 ,\ \sum t_i = 1 \right\}. \qquad \square$$

Lem 2: η faccia di $\sigma \implies \sigma \cap \overline{\eta} = \eta$.



(Wlog: $\sigma = \operatorname{Conv}(0, e_1, \ldots, e_n)$.)

Lem 3: η faccia di σ, $y \in \eta$, $x \in \sigma \setminus \eta$
$\Longrightarrow$ i punti sulla retta $\overline{[x,y]}$ fuori da $[x,y]$ dalla parte di y non stanno in σ.



Dim: Wlog $\sigma = \mathrm{Conv}(0, e_1, \dots, e_n)$
$\eta = \mathrm{Conv}(0, e_1, \dots, e_p)$

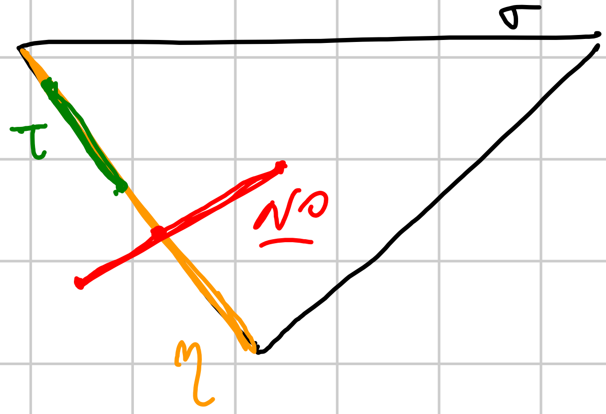
$y = (t_1, \dots, t_p, 0, \dots, 0)$

$x = (s_1, \dots, s_n)$ $\quad \exists j > p$ t.c. $s_j > 0 \Longrightarrow z_j < 0$

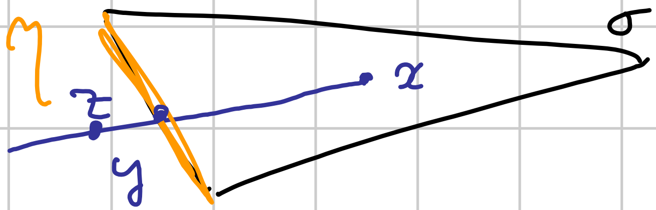
$\Longrightarrow z \notin \sigma$. $\square$

Lem 4: η faccia di σ, τ simplesso, $\tau \subset \sigma$, $\mathrm{int}(\tau) \cap \eta \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \tau \subset \eta$.



Dim: prendo $y \in \mathrm{int}(\tau) \cap \eta$. Per assurdo $x \in \tau \setminus \eta$. Noto: $x \in \sigma$



Siccome $y \in \mathrm{int}(\tau)$, ogni z vicino a y dovrebbe stare in τ e dunque in σ: contro Lem 3.

per il Lem 1, osservando che $\overline{[x\,y]} \subset \overline{\tau}$. ∎

Lem 5: $\mathcal{L} < \mathcal{K}$ allora ogni $\sigma \in \mathcal{K}$ è minore di $\tau \in \mathcal{L}$.

Dim: $x \in \mathcal{K}$. Ho $|\mathcal{K}| = |\mathcal{L}|$ e $|\mathcal{L}| = \bigsqcup_{\tau \in \mathcal{L}} \mathrm{int}(\tau)$

$\Longrightarrow \exists!\ \tau \in \mathcal{L}$ t.c. $x \in \mathrm{int}(\tau)$.

Poiché $\mathcal{L} < K$ esiste $\sigma' \in K$ t.c. $\tau \subset \sigma'$.

Ora $\eta := \sigma \cap \sigma'$ è faccia di σ' (e anche di σ):

$\mathrm{int}(\tau) \cap \eta \neq \emptyset$, $\tau \subset \sigma'$, η faccia di σ'

$$\underset{\text{Lem 3}}{\Longrightarrow} \tau \subset \eta \Longrightarrow \tau \subset \sigma.$$

$\blacksquare$

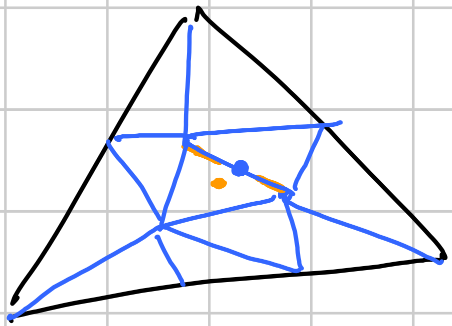
Prop: $\mathcal{L} < K \Longrightarrow$ ogni $\sigma \in K^{[n]}$ è unione di $\tau \in \mathcal{L}^{[n]}$.

(**Lemma**: σ è la chiusura topologica di $\text{int}(\sigma)$ in $\bar{\sigma}$.)

Dim: $\mathcal{L}^{(n-1)} \cap \bar{\sigma}$ è contenuto in una unione di iperpiani di $\bar{\sigma}$

$\Longrightarrow$ complementare è aperto denso

$\Longrightarrow A := \text{int}(\sigma) \setminus \mathcal{L}^{(n-1)}$ è denso in σ.



Per ogni $x \in A$ $\exists! \, \tau \in \mathcal{L}$ t.c.

$x \in \tau \subset \sigma$, $\tau \in \mathcal{L}^{[n]}$.

Lo chiamo τ_x.

$$A \subset \underbrace{\bigcup_{x \in A} \overline{\tau_x}} \subset \sigma$$

$\Rightarrow$ unione finita di simplessi

$\Rightarrow$ chiuso di $\overline{\sigma}$

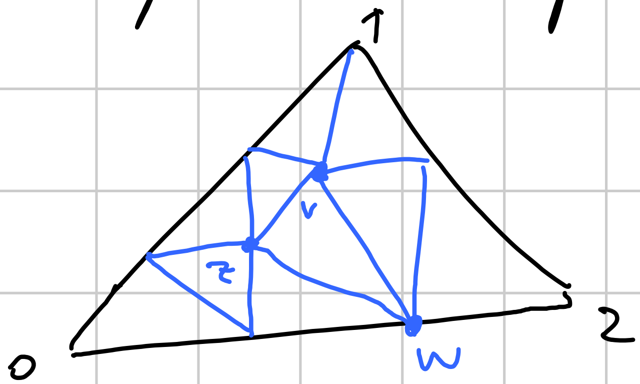
poiché $\sigma = cl_{\overline{\sigma}}(A)$ concludo che $\bigcup_{x \in A} \tau_x = \sigma$. $\blacksquare$

(2) $\mathcal{L} < \mathcal{K}$ $\qquad C_n(\mathcal{K}) \longrightarrow C'_n(\mathcal{L})$

$$\sigma \longmapsto \sum_{\tau < \sigma}{}' \pm \tau$$

induce isomorfismo.

Notazione: dato $\tau \in \mathcal{L}$ chiamo $a(\tau)$ (antenato) il più piccolo simplesso di σ che contiene τ.



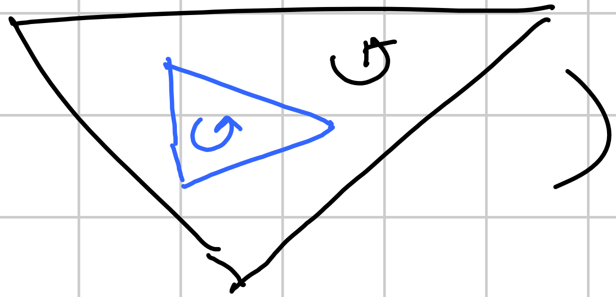
$a(v) = (0,1,2)$

$a(w) = (0,2)$

$a(z,v,w) = (0,1,2)$

So che $H_*(K)$ non cambia / isomorfismo con l'orientazione
quindi scelgo di orientare $\tau \in \mathcal{L}$

- se $\dim(a(\tau)) = \tau$, come $a(\tau)$
  $\left(\overline{a(\tau)} = \overline{\tau}\right.$:



- altrimenti, a caso.

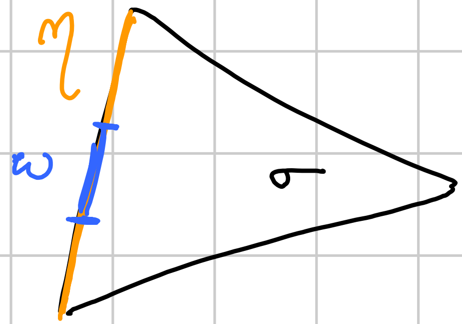
$$\psi_n : C_n(K) \longrightarrow C_n(\mathcal{L})$$
$$\sigma \longmapsto \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{L}^{[n]} \\ \tau \subset \sigma}} \tau$$

Voglio provare che induce isomorfismo.

<u>Fatti</u>:

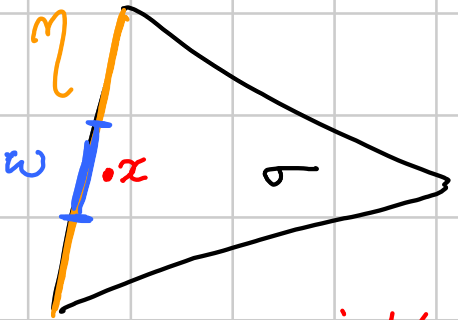
(1) $\sigma \in K^{[n]}$, $\eta \subset \sigma$ faccia di codim 1, $\omega \in \mathcal{L}^{[n-1]}$, $a(\omega) = \eta$

$\Longrightarrow \exists! \, \beta \in \mathcal{L}^{[n]}$ t.c. $\beta \subset \sigma$, ω è faccia di β

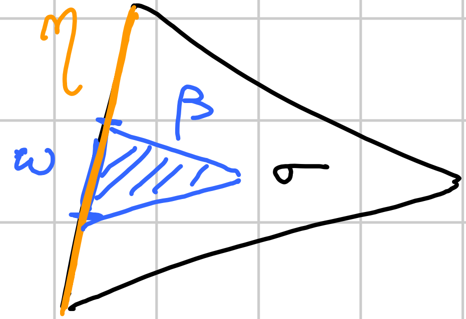


Inoltre $\varepsilon^{\mathcal{L}}(\beta,\omega) = \varepsilon^{\mathcal{K}}(\sigma,\eta)$.

Dim:



$\Downarrow$

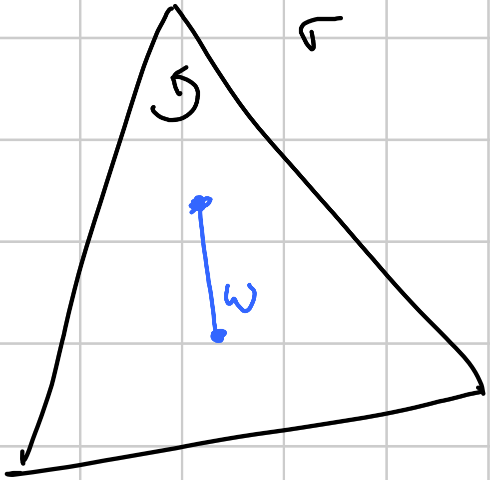


$x \in \mathrm{int}(\sigma)$ vicino a $\mathrm{int}(\omega)$

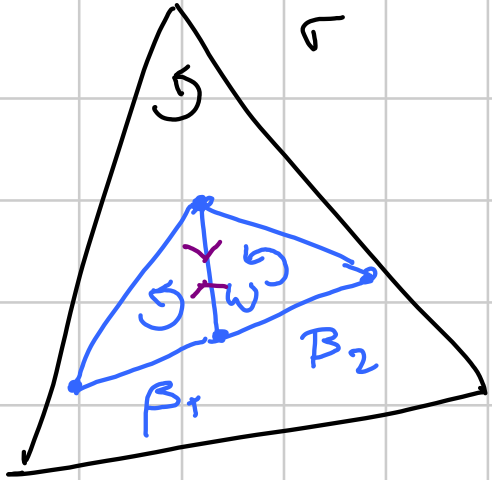
(2) $\omega \in \mathcal{L}^{[n-1]}$, $a(\omega) = \sigma \in \mathcal{K}^{[n]}$

$\Longrightarrow$ esistono esattamente due $\beta \in \mathcal{L}^{[n]}$ t.c. $\omega \subset \beta \subset \sigma$.

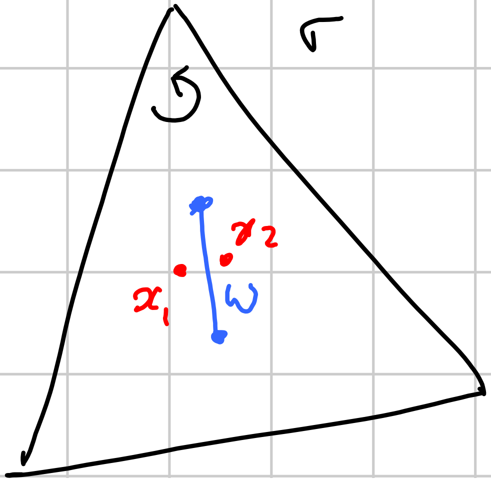
Inoltre se sono β_1, β_2 ho $\varepsilon(\beta_1,\omega) + \varepsilon(\beta_2,\omega) = 0$.



$\Longrightarrow$



Dimo:



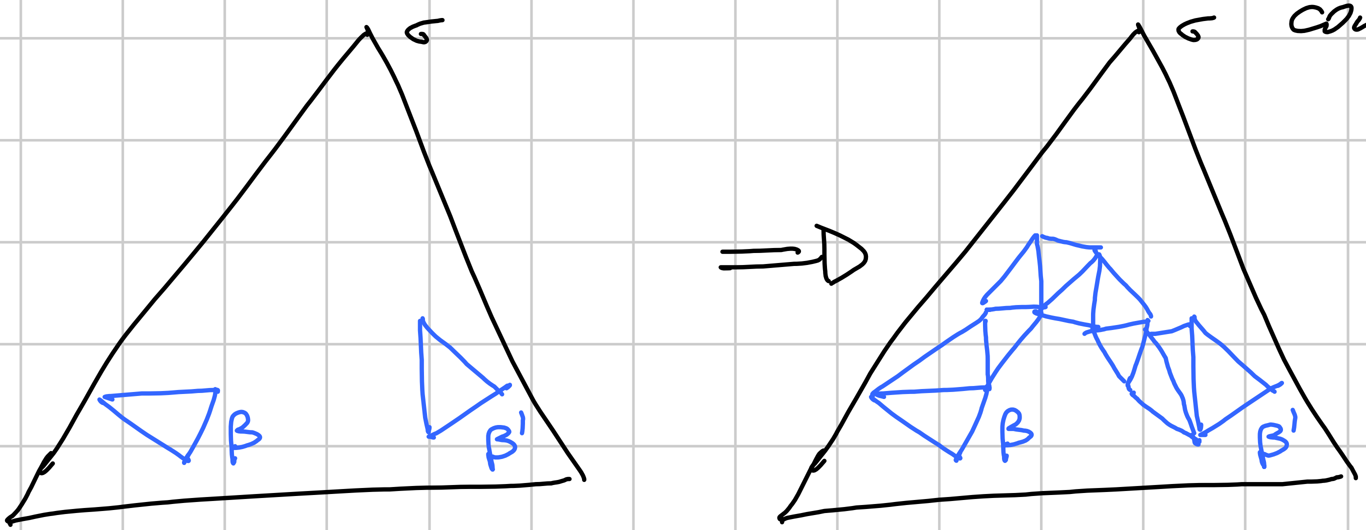
$x_1, x_2 \in int(\sigma)$
molto vicini a $int(\omega)$
fuori da ω da parti opposte

(3) Se $\beta, \beta' \in \mathcal{L}^{[n]}$ con $a(\beta) = a(\beta') =: \sigma \in K^{[n]}$

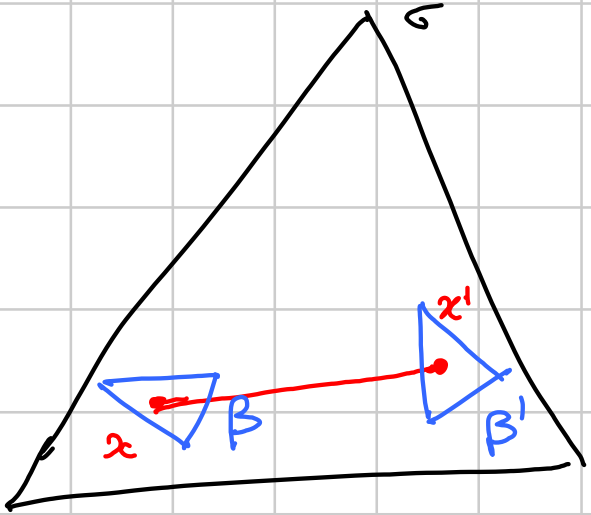
$\Longrightarrow$ esistono $\beta = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k = \beta'$ t.c.

$\beta_i \cap \beta_{i+1} = \tau_{i+1} \in \mathcal{L}^{[n-1]}$

(dunque $\tau_{i+1}, \beta_i, \beta_{i+1}$ sono come nel punto (2))



Dim:



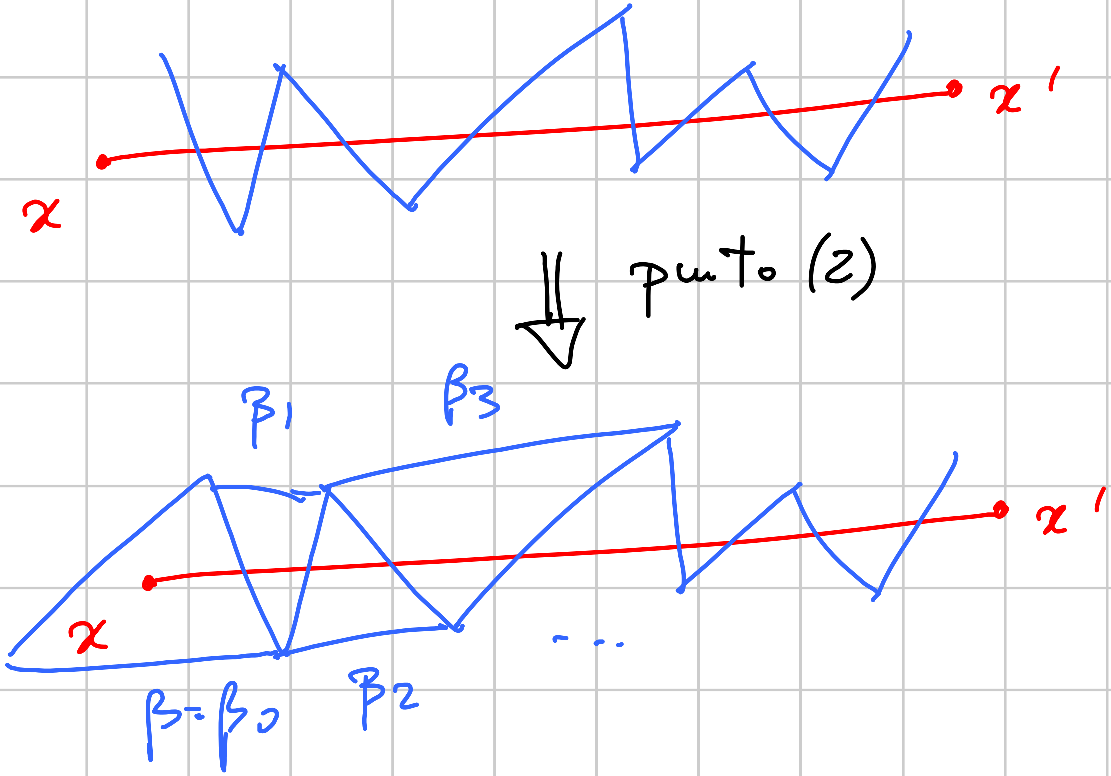
$x \in \mathrm{int}(\beta)$

$x' \in \mathrm{int}(\beta')$

genericamente $[x,x'] \cap \mathcal{L}^{(n-2)} = \emptyset$

$[x,x'] \pitchfork \mathcal{L}^{(n-1)}$

$\Longrightarrow [x,x'] \cap \mathcal{L}^{(n-1)} = \{\tau_1,\dots,\tau_k\}$



x
x'
punto (2)
β1
β3
β = β0
β2

Ricordo: $\psi_n : C_n(\mathcal{K}) \longrightarrow C_n(\mathcal{L})$

$$\sigma \longmapsto \sum_{\substack{\tau \subset \sigma \\ \tau \in \mathcal{L}^{[n]}}} \tau$$

Affermo che è un morfismo:

$$\begin{tikzcd}
C_n(\mathcal{K}) \arrow[r, "\partial_n^{\mathcal{K}}"] \arrow[d, "\psi_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n-1}(\mathcal{K}) \arrow[d, "\psi_{n-1}"] \\
C_n(\mathcal{L}) \arrow[r, "\partial_n^{\mathcal{L}}"] & C_{n-1}(\mathcal{L})
\end{tikzcd}$$

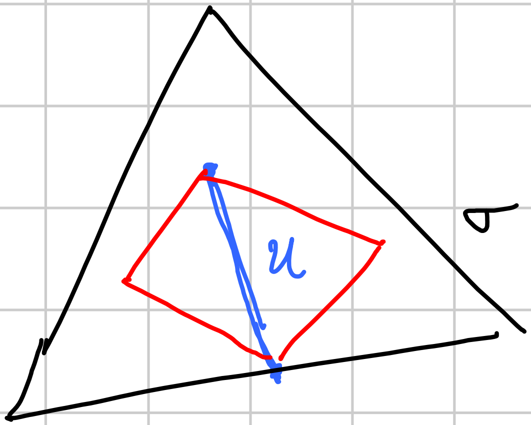
$$\partial_n^{\mathcal{L}} \circ \psi_n = \psi_{n-1} \circ \partial_n^{\mathcal{K}}$$

$$\partial_n^{\mathcal{L}}(\psi_n(\sigma)) = \partial_n^{\mathcal{L}}\Big(\sum_{\substack{\tau\in\mathcal{L}^{[n]}\\ a(\tau)=\sigma}}{}' \tau\Big) = \sum_{\substack{\tau\in\mathcal{L}^{[n]}\\ a(\tau)=\sigma}}{}' \quad \sum_{\substack{u\in\mathcal{L}^{[n-1]}\\ u\subset\tau}}{}' \varepsilon(\tau,u)\cdot u = A$$

$$\psi_{n-1}(\partial_n^{K}\sigma) = \psi_{n-1}\Big(\sum_{\substack{\eta\in K^{[n-1]}\\ \eta\subset\sigma}}{}' \varepsilon(\sigma,\eta)\cdot\eta\Big) = \sum_{\substack{\eta\in K^{[n-1]}\\ \eta\subset\sigma}}{}' \varepsilon(\sigma,\eta)\sum_{\substack{u\in\mathcal{L}^{[n-1]}\\ a(u)=\eta}}{}' u = B$$

Dato $u\in\mathcal{L}^{[n-1]}$ che compare in una delle due somme ho certamente $u\subset\sigma$; dunque ho due casi:

• $a(u) = \sigma$

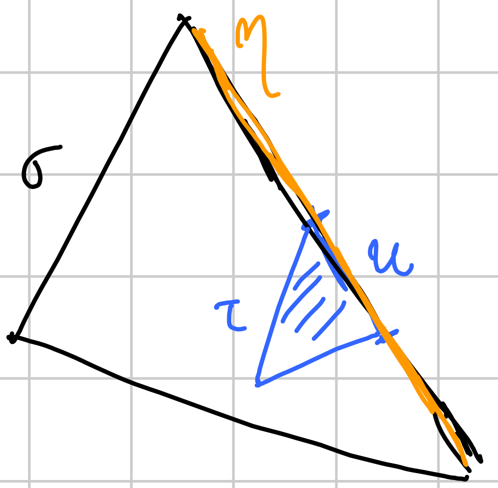


coeff in (A) di u è
la somma degli $\varepsilon(\tau, u)$
al variare dei τ che hanno
u come faccia e σ come antitutto

VISTO: ce ne sono due
con ε opposti (2)

In (B) la u non compare –

• $a(u) = \eta \in K^{[n-1]}$



Sia in A sia in B u compare una volta con coeff $\varepsilon(\tau, u)$ e $\varepsilon(\sigma, \eta)$

Uguali per (1).

Provato che ψ è morfismo.

Affermo che induce isomorfismo in omologia.

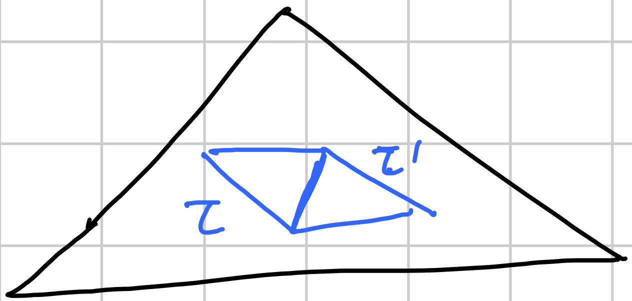
Surjettività: dato $z \in Z_n(\mathcal{L})$ cioè $(\partial_n^{\mathcal{L}} z = 0)$

cerco $w \in Z_n(K)$ t.c. $z = \psi_n(w)$

NO

(dunque $\psi_{n*}([w]) = [z]$).

Considero $\sigma \in K^{[n]}$ e i $\tau \in \mathcal{L}^{[n]}$ con $a(\tau) = \sigma$

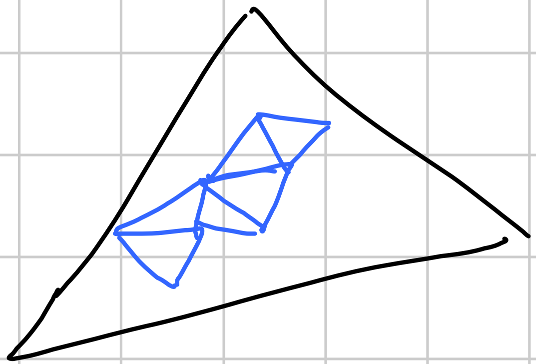


esaminando i loro coeff in z

$\tau \cap \tau' =: \omega \in \mathcal{L}^{[n-1]}$

$\partial z = 0 \Rightarrow$ coeff di ω in ∂z è 0

$\Rightarrow$ coeff. di τ e di τ' in z è stesso



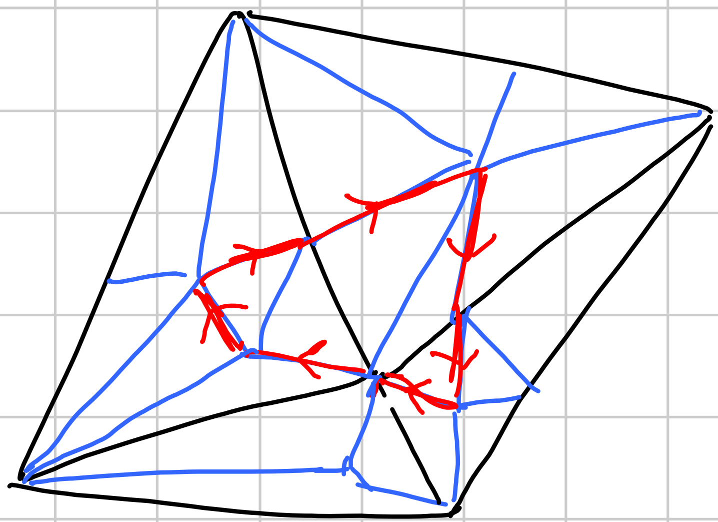
$\Longrightarrow$ i coeff. di tutti i τ in z con $a(\tau) = \sigma$ sono uguali fra loro, lo chiamo n_σ

$\Longrightarrow$ $z = \psi_n(w)$

$$w = \sum_{\sigma \in K^{(n)}} n_\sigma \cdot \sigma$$

Non è vero: ho trattato solo i $\tau \in \mathcal{L}^{[n]}$ che compaiono in z con $a(\tau) \in K^{[n]}$. Posso avere invece $a(\tau) \in K^{[m]}$ con $m > n$.

1-ciclo

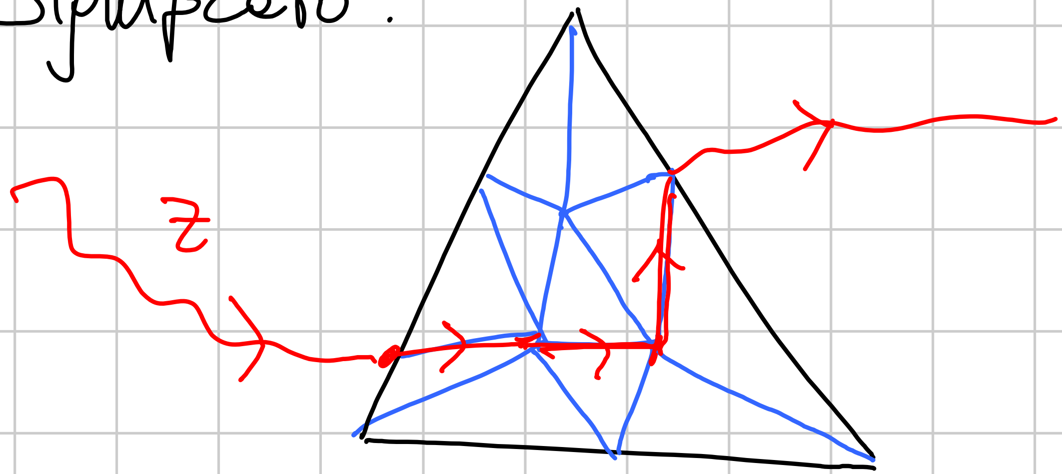


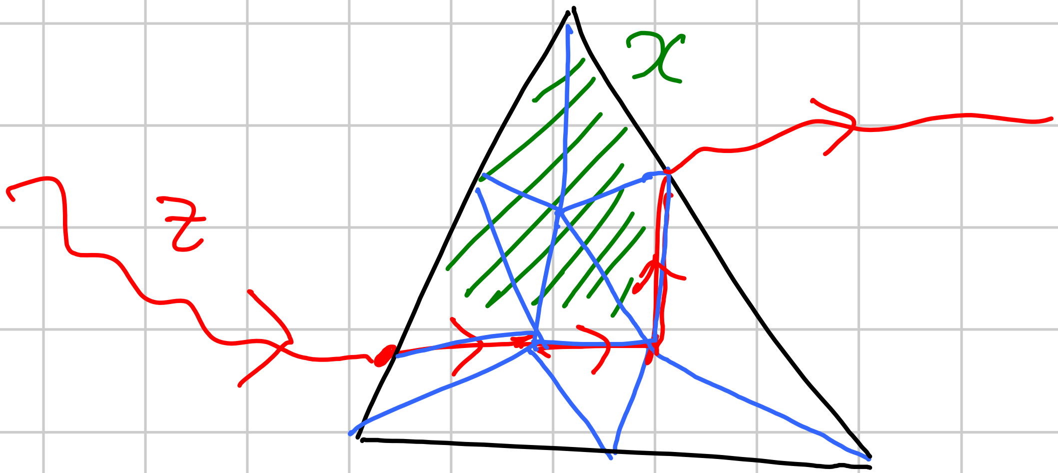
$\dim(a(\tau)) > 1$ $\forall \tau$ che compare in z

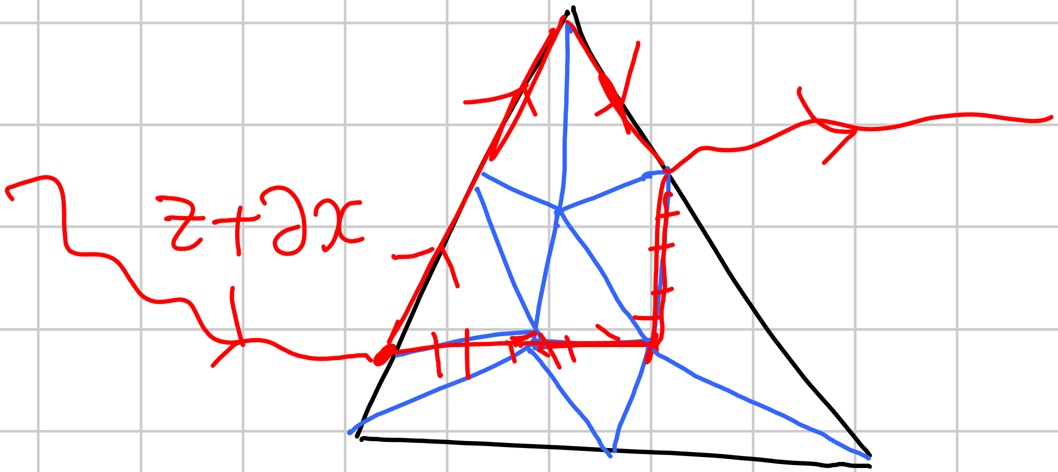
<u>Fatto vero</u>: $\forall z \in Z_n(\mathcal{L})$ $\exists u \in B_n(\mathcal{L})$ $w \in Z_n(\mathcal{K})$ t.c. $\psi_n(w) = z + u$

Basta per suriettività: $[\psi_n(w)] = [z+u] = [z]$ _

Significato:




x
z



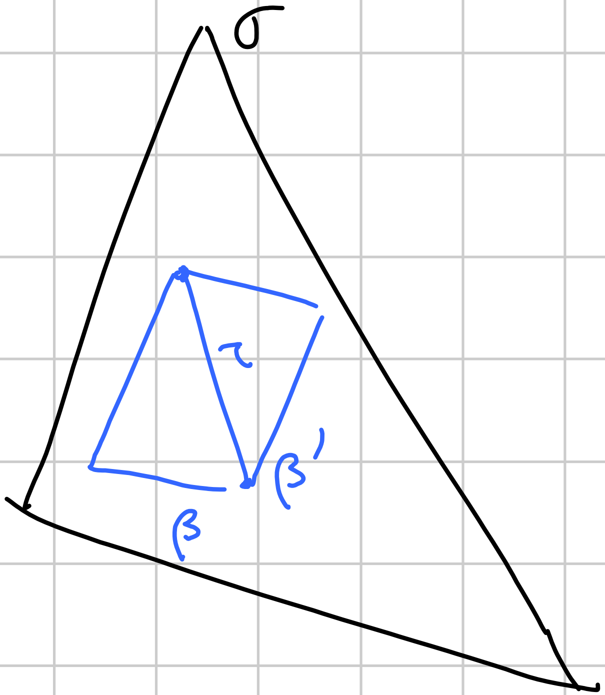
z+∂x

<u>Iniettività</u>: dato $z \in Z_n(\mathcal{K})$ con $\psi_n(z) \in B_n(\mathcal{L})$
provo che $z \in B_n(\mathcal{K})$

$(\mathrm{Ker}\, \psi_{n_*} = \{0\})$

So che $\exists\, w \in C_{n+1}(\mathcal{L})$ t.c. $\partial^{\mathcal{L}}_{n+1} w = \psi_n(z)$.

Preso $\sigma \in \mathcal{K}^{(n+1)}$ e considero $\tau \in \mathcal{L}^{(n)}$ con
$a(\tau) = \sigma$; allora τ non compare in $\psi_n(z)$



$\Longrightarrow$ β, β' devono avere lo stesso coefficiente in w

$\Longrightarrow$ $w = \psi_{n+1}(y)$

Ora $\psi_n(z) = \partial^{\alpha}_{n+1} w = \partial^{\alpha}_{n+1}\left(\psi_{n+1}(y)\right)$

$$= \psi_n \left(\partial^{\alpha}_{n+1} y \right)$$

ma ψ_n è iniettiva $\Longrightarrow$ $z = \partial^{\alpha}_{n+1} y$. $\blacksquare$