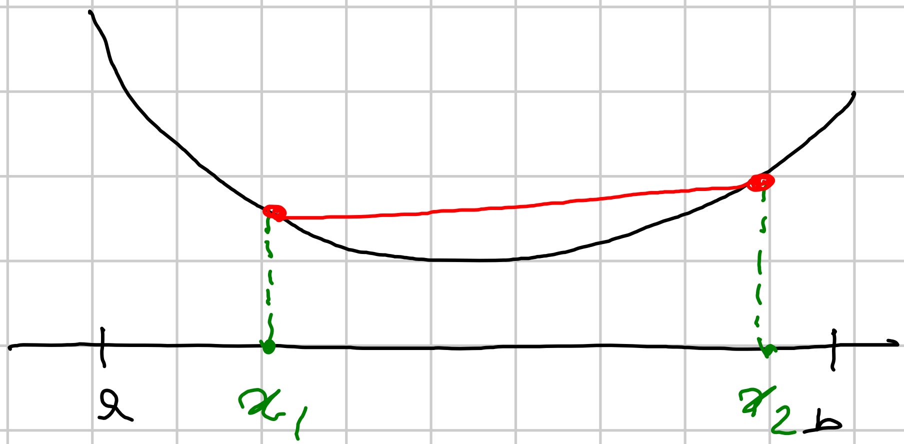
Matematica A 20/4/16

- Tg al grafico di f in pto x_0 è $y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$
- $f'(x)>0$ su $(a,b) \Longrightarrow f$ crescente su (a,b)
- $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0 \Longrightarrow x_0$ pto di min. loc.
- x_0 pto di min loc $\Longrightarrow f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\geq 0$
- $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ continua
  $\Longrightarrow f$ ha max e min e per cercarli
  si confrontano i valori di f
  + agli estremi

* nei punti in cui f' non esiste
* nei punti in cui f' esiste nulla

- Nel caso $(a,b]$ o $[a,b)$ o (a,b) (compreso $a=-\infty$ o $b=+\infty$) non c'è garanzia di esistenza di max o min ma si cercano valutando:
  - valori o limiti agli estremi
  - valori nei punti in cui f' non esiste
  - valori in cui $f'=0$

- f convessa su (a,b) se



$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $\forall t \in [0,1]$

$f(tx_1+(1-t)x_2) \leq t f(x_1) +$

$+ (1-t) f(x_2)$

f concava se viceversa (cioè se $-f$ è convessa)

- $f'' > 0$ su $[a,b]$ la f convessa

- flesso = pto di cambio tra concavità e convessità

- x_0 flesso $\Longrightarrow f''(x_0) = 0$ _

(1) Intervalli di crescenza / decrescenza _

(a) $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$ $\qquad (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

crescente per $f'(x) > 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{1}{x}$$

$$x > 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} > 2$$

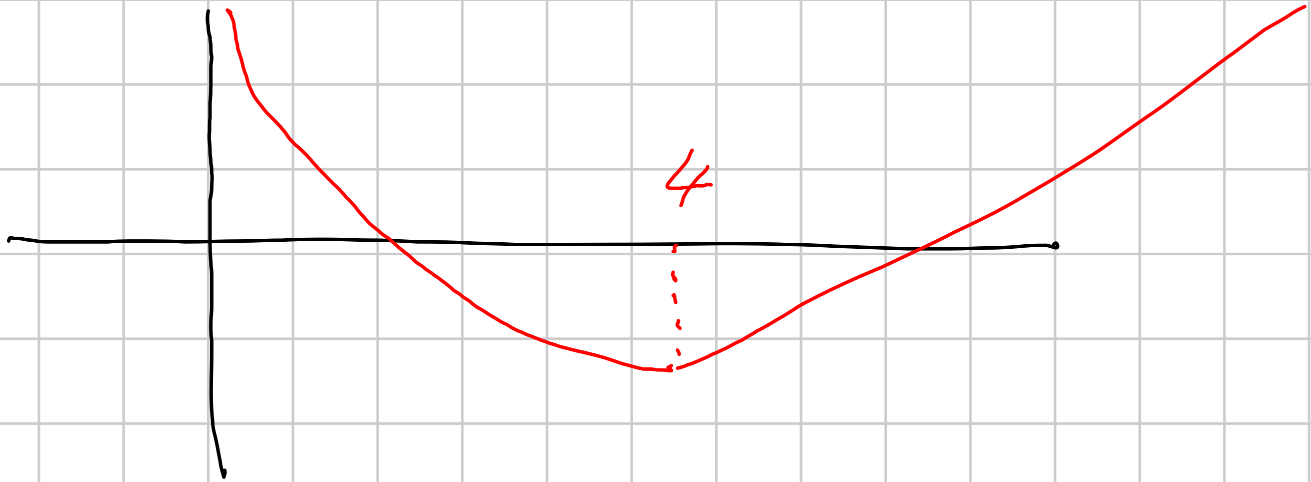
$$x > 4$$

Dunque: f decrescente in $(0,4)$

f crescente in $(4,+\infty)$

f ha min in $x=4$.

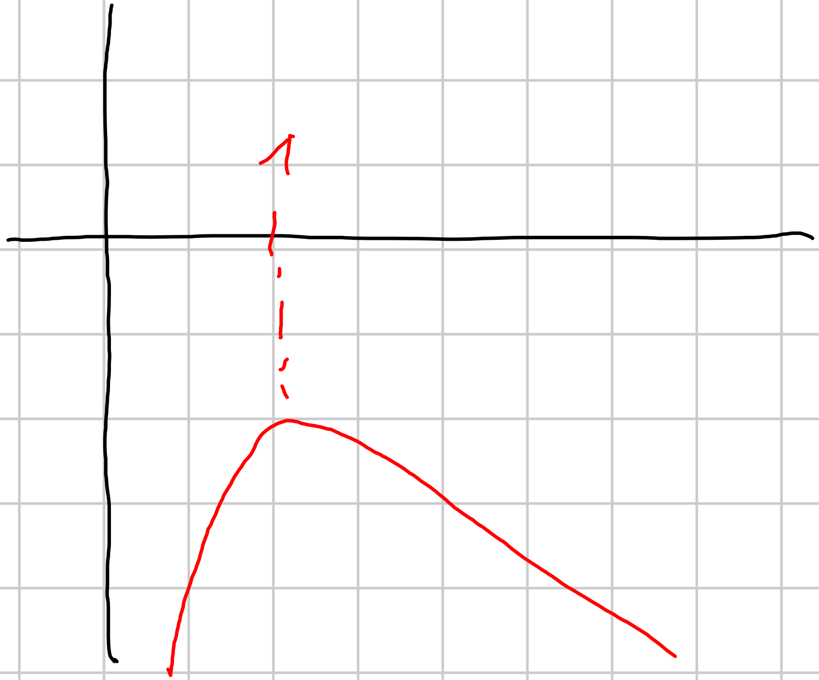
$$\lim_{0^+} f = +\infty \qquad \lim_{+\infty} f = +\infty$$



(9) $\ln(x) - x$ $\qquad f' = \frac{1}{x} - 1$ $\qquad (0, +\infty)$

f crescente su $(0,1)$
decrescente su $(1, +\infty)$
max in $x = 1$

$\lim_{0^+} = -\infty \qquad \lim_{+\infty} = -\infty$



(f) $3x^4 - 28x^3 + 84x^2 - 96x - 105$ $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 12(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$
$$= 12(x-1)(x^2 - 6x + 8)$$
$$= 12(x-1)(x-2)(x-4)$$

f decrescente su $(-\infty, 1)$ e $(2, 4)$
crescente su $(1, 2)$ e $(4, +\infty)$
ha min loc in $x = 1$ e $x = 4$
ha max loc in $x = 2$

(h) $4\arctan(x) - \ln(x)$ $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{4x - 1 - x^2}{x(1+x^2)} = -\frac{x^2 - 4x + 1}{x(1+x^2)}$$

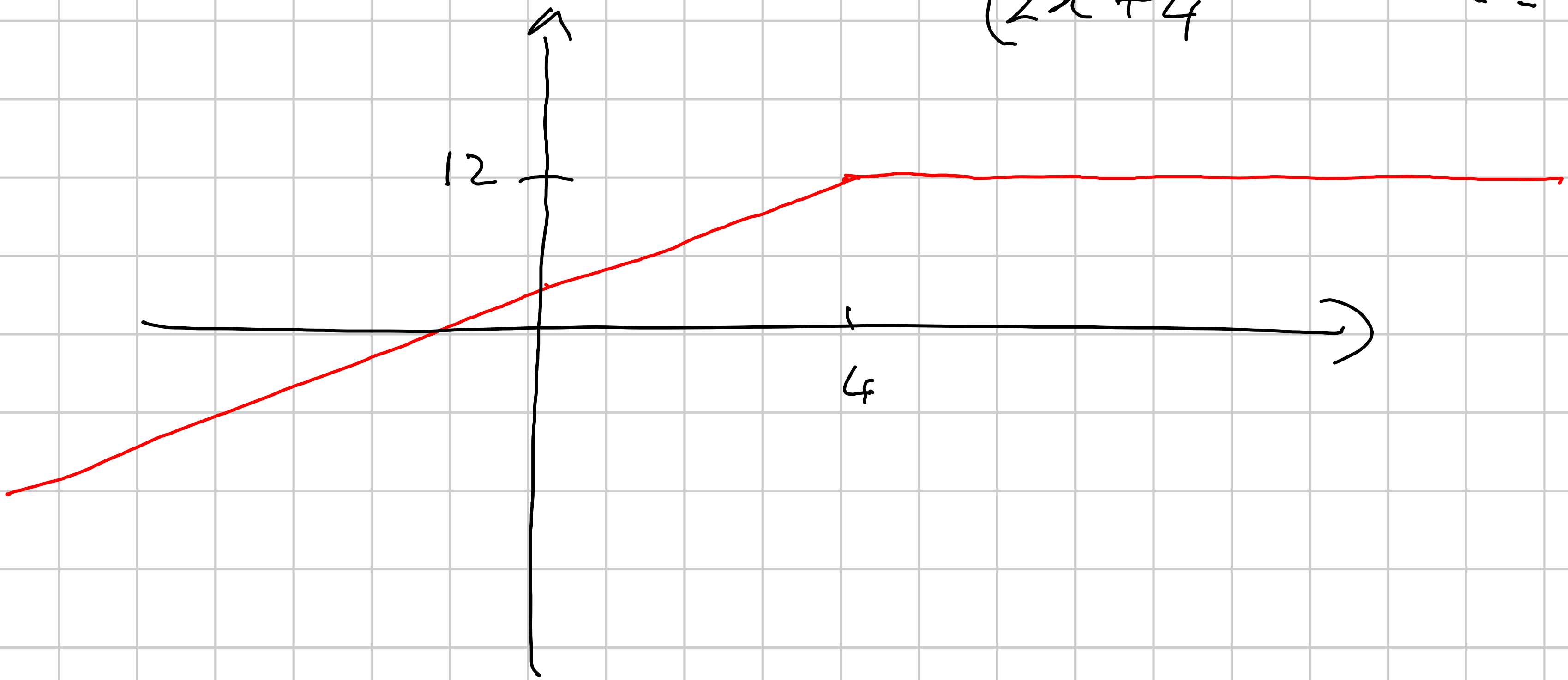
$2 \pm \sqrt{3}$ zeri della derivata

f decrescente su $(0, 2-\sqrt{3}]$ e $[2+\sqrt{3}, +\infty)$

crescente su $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$

$\lim\limits_{0^+} = +\infty$ $\lim\limits_{+\infty} = -\infty$

(j) $f(x) = x - |x-4| + 8 = \begin{cases} 12 & x \geq 4 \\ 2x+4 & x \leq 4 \end{cases}$



k) $f(x) = x^3 - |x-4| + 8 = \begin{cases} x^3 - x + 12 & x \geq 4 \\ x^3 + x + 4 & x \leq 4 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \geq 4 \\ 3x^2 + 1 & x \leq 4 \end{cases}$

f' non esiste in $x = 4$; dove esiste è segno > 0

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2+2x-8} = \frac{|x-1|}{(x+4)(x-2)}$$

asintoti verticali in $x=-4$ e $x=2$

derivata: $\pm\left(\frac{x-1}{x^2+2x-8}\right)' = \frac{x^2+2x-8-(2x+2)(x-1)}{(x^2+2x-8)^2}$

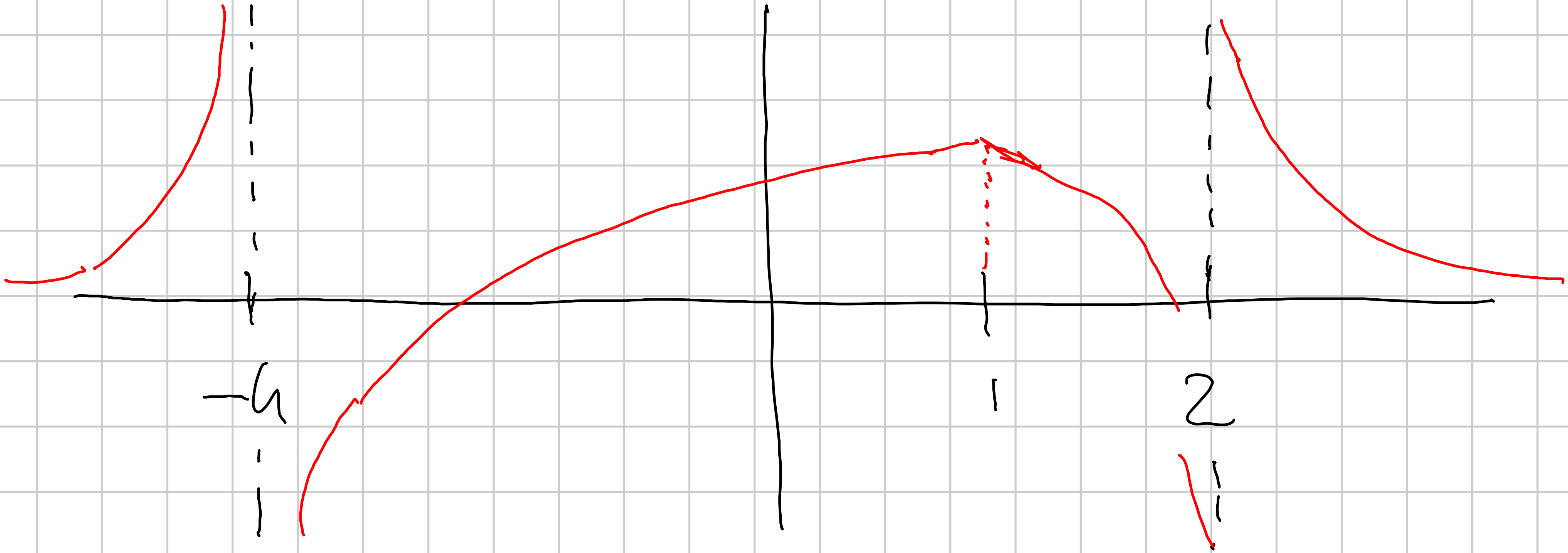
$$= \frac{x^2+2x-8-2x^2+2}{(\ \ )^2} = \frac{-x^2+2x-8}{(\ \ )^2} = \frac{-(x-1)^2-7}{(\ \ )^2}$$

f dove def è crescente per $x<1$
decrescente per $x>1$

max loc in $x = 1$

$\lim_{-\infty} = 0^+$ $\lim_{-\infty} = 0^+$

$\lim_{-4^-} = +\infty$ $\lim_{-4^+} = -\infty$ $\lim_{2^-} = -\infty$ $\lim_{2^+} = +\infty$



(2) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ trovare intervalli di crescenza/decr.

(a) $f(x) = x^3 - kx^2$

$f'(x) = 3x^2 - 2kx = x(3x - 2k)$

Nullo in $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}k$

Per $k = 0$ $f(x) = x^3$ crescente in $\mathbb{R}$

Per $k > 0$ crescente su $(-\infty, 0)$ e $(\frac{2}{3}k, +\infty)$
decrescente su $(0, \frac{2}{3}k)$

Per $k < 0$ crescente su $(-\infty, \frac{2}{3}k)$ e $(0, +\infty)$
decrescente su $(\frac{2}{3}k, 0)$

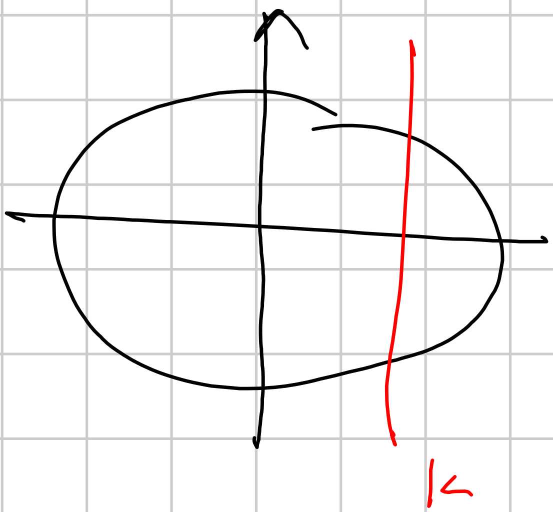
(e) $f(x) = \operatorname{sen}(x) - kx$

$f'(x) = \cos(x) - k$

Per $k \leq -1$ ho $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescente in $\mathbb{R}$

Per $k \geq 1$ ho $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ decrescente in $\mathbb{R}$.

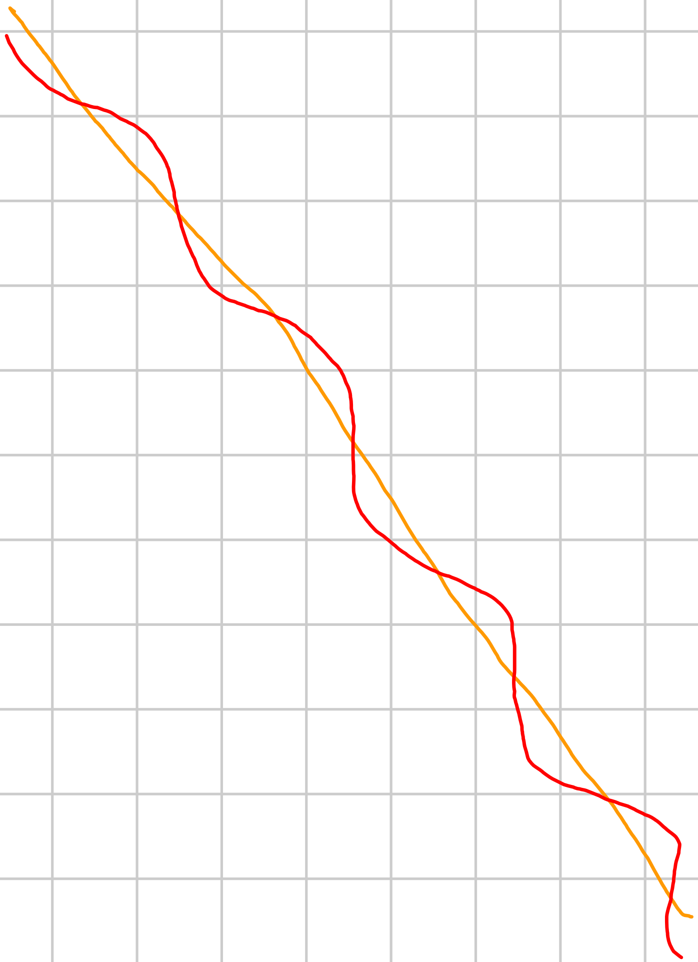
Per $-1 < k < 1$ f crescente in



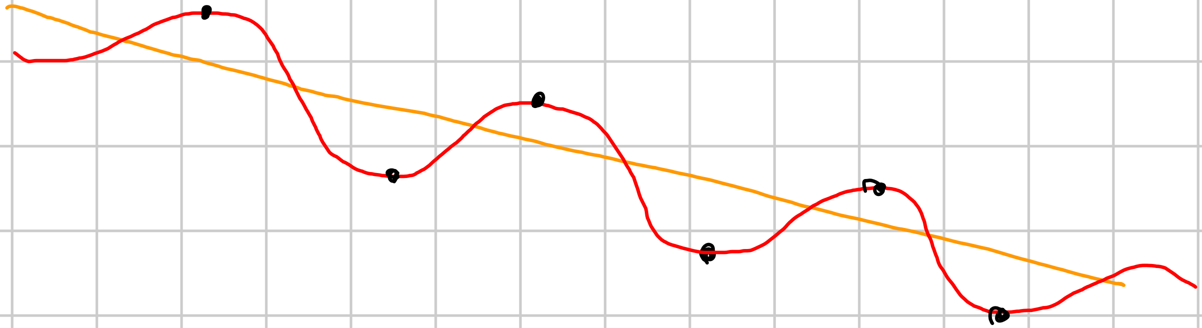
$(+2h\pi - \operatorname{acos}(k), 2h\pi + \operatorname{acos}(k))$

decrescente sul complementare.

$k > 1$



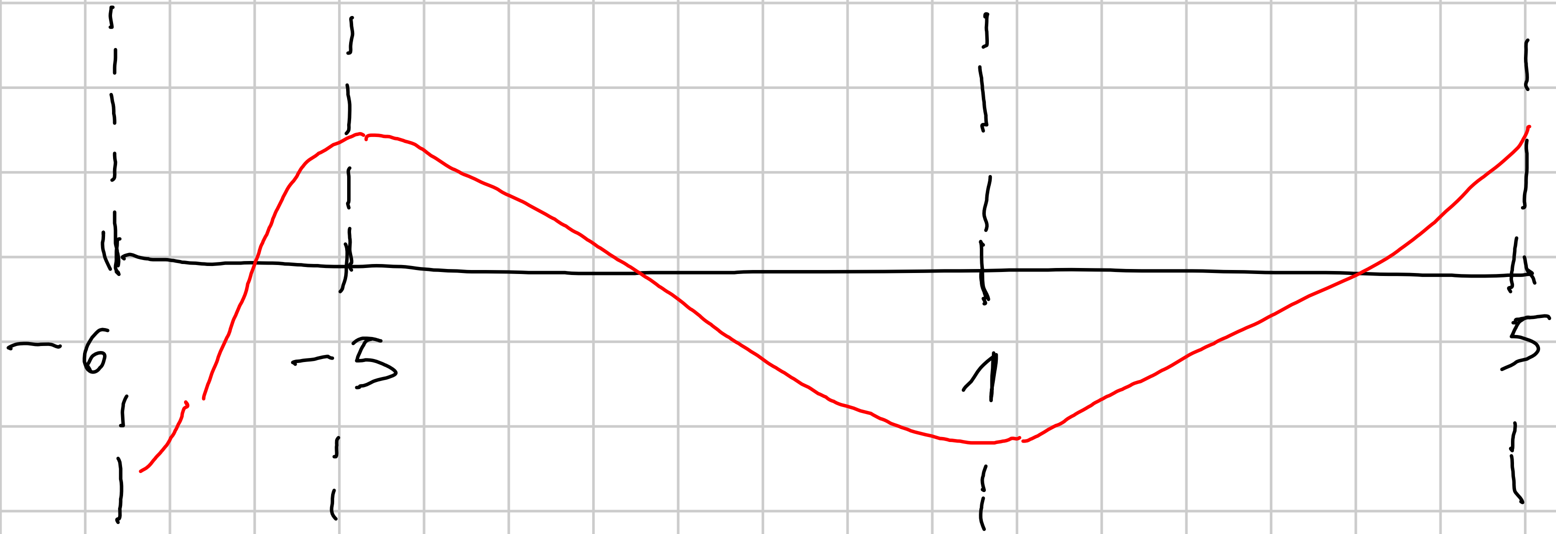
$-1 < k < 1$



③ Trovare max e min su I

(a) $x^3+6x^2-15x-1$ $\qquad [-6,5]$

$$f'(x) = 3x^2+12x-15 = 3(x^2+4x-5) = 3(x+5)(x-1)$$



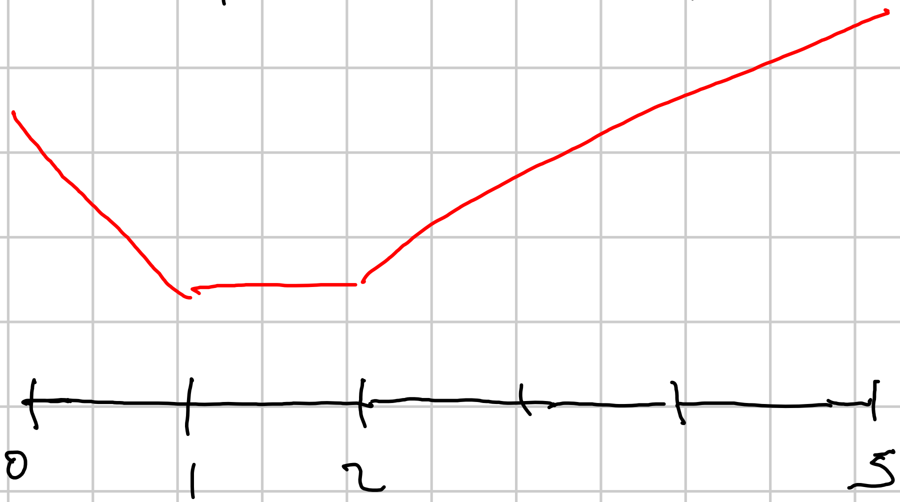
min: confrontare $f(-6)$ e $f(1)$
max: confrontare $f(-5)$ e $f(5)$

(b)

$f(x) = |x-2| + |x-1| \qquad [0,5]$

f lineare su tratti $\quad [0,1] \quad [1,2] \quad [2,5]$

$f(0) = 3 \qquad f(1) = 1 \qquad f(2) = 1 \qquad f(5) = 7$



$\max = 7$

$\min = 1$

(d) $f(x) = \sqrt{9-x^2} - \sqrt{10-x^2}$ $[-1,2]$

continue $\Rightarrow$ ho max/min.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\cdot(-2x) - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{10-x^2}}(-2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\dots}\sqrt{\dots}}\Big(\underbrace{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{10-x^2}}_{\text{sempre neg.}}\Big)$$

$\Rightarrow$ f crescente su $[-1,0]$

decrescente su $[0,2]$

max = $f(0) = 3 - \sqrt{10}$

min = confrontare $f(-1) = 2\sqrt{2} - 3 = -\ldots$

$f(2) = \sqrt{5} - \sqrt{6} = -\ldots$

(viene minore $f(2)$)

(h) $f(x) = \operatorname{atan}(\ln(x))$ $[1, e]$

ln crescente
atan crescente $\Longrightarrow$ f crescente

min $= f(1) = 0$ max $= f(e) = \frac{\pi}{4}$

(i) $f(x) = \dfrac{x - 2|x|}{|x|+1} = \begin{cases} -\dfrac{x}{1+x} & x \geq 0 \\ \dfrac{3x}{1-x} & x \leq 0 \end{cases}$ $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{-\infty} = -1$ $f(0) = 0$ $\lim\limits_{+\infty} = -3$

$\left(-\dfrac{x}{1+x}\right)' = \left(-1 + \dfrac{1}{1+x}\right)' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ neg $(x \geq 0)$

$\left(\dfrac{3x}{1-x}\right)' = \dfrac{3 - 3x + 3x}{(1-x)^2} = \dfrac{3}{(1-x)^2}$ pos $(x \leq 0)$

min : non esiste
max : $f(0) = 0$.

④ Intervalli di concavità / convessità

c) $f(x) = \frac{1}{1+x} + \log \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} - \log(1+x)$

$f'(x) = -(1+x)^{-2} - (1+x)^{-1}$

$f''(x) = 2(1+x)^{-3} + (1+x)^{-2}$

$= (1+x)^{-3}(2+1+x) = (1+x)^{-3}(3+x)$

Dominio : $(-1, \infty)$; $f''(x) > 0$ sul dominio

$\Longrightarrow f$ convessa

(f) $f(x) = e^{x} - e^{2x}$ $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^{x} - 2e^{2x}$ (nullo per $e^{x} = 2e^{2x}$

$e^{x} = \frac{1}{2}$ $x = -\log 2$

f crescente su $(-\infty, -\log 2)$

decrescente su $(-\log 2, +\infty)$

max in $-\log 2$)

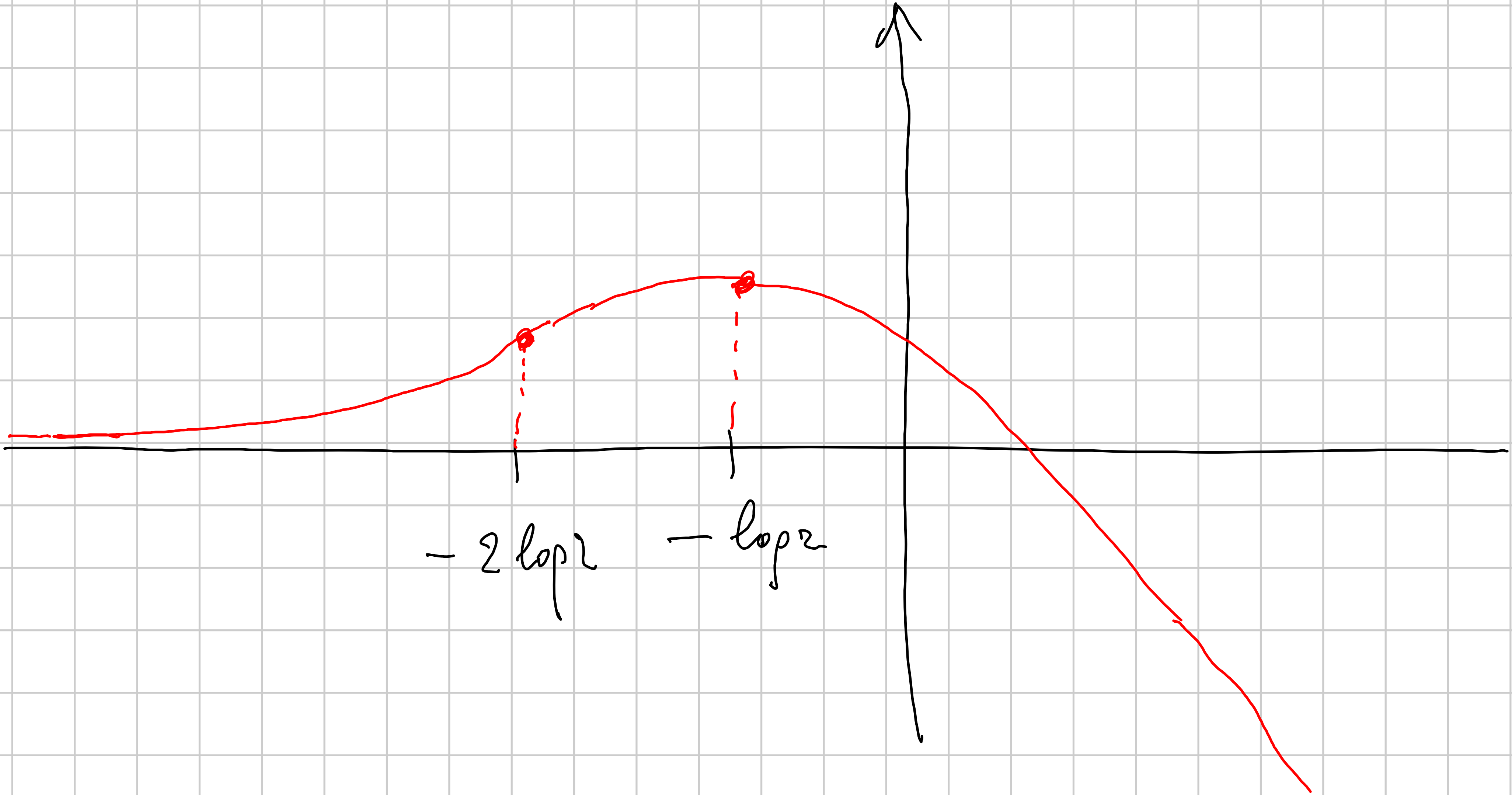
$f''(x) = e^{x} - 4e^{2x}$ nullo per $x = -2\log 2$

f convessa su $(-\infty, -2\log 2)$

concava su $(-2\log 2, +\infty)$

flesso in $-2\log 2$

$$\lim_{-\infty} = 0^+ \qquad \lim_{+\infty} = -\infty$$



(5) Trovare flessi e tangenti nei flessi

(d) $f(x) = \ln(x) + 8x^2$

$f'(x) = \frac{1}{x} + 16x$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 16$

$f''(x) = 0$ per $x = \frac{1}{4}$

neg su $(0, 1/4) \Rightarrow f$ concava

pos su $(1/4, +\infty) \rightarrow f$ convessa

$x = 1/4$ flesso

(g) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x)$

$f'(x) = \cos(x) + 2\cos(2x)$

$f''(x) = -\sin(x) - 4\sin(2x)$

$$= -\sin(x) - 8\sin(x)\cos(x)$$

$$= -\sin(x)\left(1 + 8\cos(x)\right)$$

flessi nei punti $x = k\pi$

$$x = \pm \operatorname{acos}\left(-\frac{1}{8}\right) + 2k\pi$$

(h) $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \operatorname{atan}(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x - \frac{1}{1+x^2} = x(1+x^2)^{-1/2} - (1+x^2)^{-1}$$

$$f''(x) = (1+x^2)^{-1/2} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x + (1+x^2)^{-2}$$

$$= (1+x^2)^{-1/2} - x^2(1+x^2)^{-3/2} + (1+x^2)^{-2}$$

$$= (1+x^2)^{-3/2}(1+x^2-x^2) + (1+x^2)^{-2}$$

$$= (1+x^2)^{-3/2} + (1+x^2)^{-2}$$ sempre pos

$\Longrightarrow$ f convessa