Matematica A - 17/11/15

ERRORE DA EVITARE:

E, F eventi indipendenti

(cioè $p(E \text{ e } F) = p(E) \cdot p(F)$)

NON E' VERO CHE: $p(E \text{ e } F | G) = p(E|G) \cdot p(F|G)$ –

$$\frac{p(E \text{ e } F \text{ e } G)}{p(G)} \qquad \qquad \frac{p(E \text{ e } G)}{p(G)} \cdot \frac{p(F \text{ e } G)}{p(G)}$$

ESEMPIO : estrazione del lotto a 90 numeri.

E = estratto pari $\qquad p(E) = \frac{1}{2}$

F = estratto mult. di 3 $\qquad p(F) = \frac{1}{3}$

E e F = estratto mult. di 6 $\qquad p(E \text{ e } F) = \frac{1}{6}$

$\Longrightarrow$ indipendenti.

G = estratto mult. di 23

$p(E|G) = \frac{1}{3}$ $\qquad 23, 46, 69$

$p(F|G) = \frac{1}{3}$ $\qquad p(E \text{ e } F / G) = 0$

Era sbagliata la soluzione dell'ultima domanda dell'esercizio 6 :

$$p(F1 = B \text{ e } F2 = A \mid P = AB \text{ e } M = B)$$

FORMULA UTILE : X, Y eventi incompatibili
Z indipendente da X e da Y

$$\Longrightarrow p(E \mid (X \text{ o } Y) \text{ e } Z)$$

$$= p(E \mid X \text{ e } Z) \cdot \frac{p(X)}{p(X)+p(Y)} + p(E \mid Y \text{ e } Z) \cdot \frac{p(Y)}{p(X)+p(Y)}$$

<u>SPIEGAZIONE</u> : •) Z condiziona tutto — me lo dimentico

•) $$p(E \mid X \text{ o } Y) = p(E/X) \cdot \frac{p(X)}{p(X)+p(Y)} + p(E/Y) \cdot \frac{p(Y)}{p(X)+p(Y)}$$

"peso opportunamente i due condizionamenti"

<u>DIMOSTRAZIONE</u> : $p(E \mid (X \text{ o } Y) \text{ e } Z)$

$$= \frac{p(E \text{ e } (X \text{ o } Y) \text{ e } Z)}{p((X \text{ o } Y) \text{ e } Z)} = \frac{p(E \text{ e } X \text{ e } Z \text{ o } E \text{ e } Y \text{ e } Z)}{p(X \text{ e } Z \text{ o } Y \text{ e } Z)}$$

$$= \frac{p(E \text{ e } X \text{ e } Z) + p(E \text{ e } Y \text{ e } Z)}{p(X \text{ e } Z) + p(Y \text{ e } Z)}$$

$$= \frac{p(E \mid X \text{ e } Z) \cdot p(X \text{ e } Z) + p(E \mid Y \text{ e } Z)\, p(Y \text{ e } Z)}{p(X \text{ e } Z) + p(Y \text{ e } Z)}$$

$$= \frac{p(E \mid X \text{ e } Z) \cdot p(X) \cdot \cancel{p(Z)} + p(E \mid Y \text{ e } Z) \cdot p(Y) \cdot \cancel{p(Z)}}{p(X) \cdot \cancel{p(Z)} + p(Y) \cdot \cancel{p(Z)}}$$

$$= p(E \mid X \text{ e } Z) \cdot \frac{p(X)}{p(X) + p(Y)} + p(E \mid Y \text{ e } Z) \cdot \frac{p(Y)}{p(X) + p(Y)}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \circ \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$p(F1=B \text{ e } F2=A \mid P=AB \text{ e } M=B)$$

$$= p\big(F1=B \text{ e } F2=A \mid P=AB \text{ e } (M=BB \text{ o } M=B0)\big)$$

$$= \underbrace{\cancel{p(F1=B \text{ e } F2=A \mid P=AB \text{ e } M=BB)}}_{0} \cdot \frac{\overset{b^2}{p(BB)}}{\underset{b^2}{p(BB)}+\underset{2ob}{p(B0)}}$$

$$+ \underbrace{p(F1=B \text{ e } F2=A \mid P=AB \text{ e } M=B0)}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} \cdot \frac{\overset{2ob}{p(B0)}}{\underset{b^2}{p(BB)}+\underset{2ob}{p(B0)}}$$

Foglio 17/11

1 (a) ...

(b) $p(F = AB \mid P = A \text{ e } M = B)$

$= p(F = AB \mid (P = AA \text{ o } AO) \text{ e } (M = BB \text{ o } BO))$

$= p(F = AB \mid (P = AA \text{ o } AO) \text{ e } M = BB) \cdot \dfrac{b^2}{b^2 + 2ob}$

$+ p(F = AB \mid (P = AA \text{ o } AO) \text{ e } M = BO) \cdot \dfrac{2bo}{b^2 + 2ob}$

$$= \underbrace{p(F=AB \mid P=AA \text{ e } M=BB)}_{1} \cdot \frac{a^2}{a^2+2a0} \cdot \frac{b^2}{b^2+2ob}$$

$$+ \underbrace{p(F=AB \mid P=A0 \text{ e } M=BB)}_{1/2} \cdot \frac{2a0}{a^2+2a0} \cdot \frac{b^2}{b^2+2ob}$$

$$+ \underbrace{p(F=AB \mid P=AA \text{ e } M=B0)}_{1/2} \cdot \frac{a^2}{a^2+2a0} \cdot \frac{2b0}{b^2+2b0}$$

$$+ \underbrace{p(F=AB \mid P=A0 \text{ e } M=B0)}_{1/4} \cdot \frac{2a0}{a^2+2a0} \cdot \frac{2b0}{b^2+2b0} = \ldots$$

(c) $p(P = A \mid F = O)$

$$= p(P = AO \mid F = OO) = \frac{p(P = AO \text{ e } F = OO)}{p(F = OO)}$$

$$= \frac{p(P = AO \text{ e } (M = OO \text{ o } AO \text{ e } BO) \text{ e } F = OO)}{O^2}$$

$$= \frac{1}{O^2}\Big(p(P = AO \text{ e } M = OO \text{ e } F = OO)$$

$$+ \quad \rule{5em}{0.4pt} \quad \Big)$$

$$= \frac{1}{0^2} \cdot \Big(\underbrace{p(F = 00 \mid P = A0 \text{ e } M = 00)}_{1/2} \cdot 2a0 \cdot 0^2$$

$$+ \underbrace{p(F = 00 \mid P = A0 \text{ e } M = A0)}_{1/2} \cdot 2a0 \cdot 2a0$$

$$+ \underbrace{p(F = 00 \mid P = A0 \text{ e } M = B0)}_{1/4} \cdot 2a0 \cdot 2b0 \Big)$$

(d) $P = 00$ e $M = B$ hanno 5 figli.

Probabilità di almeno 4 figli 0.

ERRORE: $x = p(F = 0 \mid P = 0 \text{ e } M = B)$

risponde $x^5 + 5(1-x)\cdot x^4$

<u>NO</u>: si può usare la binomiale per eventi indipendenti: però <u>non</u> è vero che eventi indipendenti lo restino quando aggiungo condizionamento –

Vogliamo $p\left(\begin{matrix}\text{almeno 4 figli} \\ \text{O su 5 figli}\end{matrix} \;\middle|\; \underline{P} = O \text{ e } M = B\right)$

$= p\left(\begin{matrix}\text{almeno 4} \\ \text{figli O su 5}\end{matrix} \;\middle|\; \underline{P} = OO \text{ e } (M = BO \text{ o } BB)\right)$

$$= p\big(F1=0 \text{ e } \dots \text{ e } F5=0 \mid P=00 \text{ e } (M=BO \text{ o } BB)\big)$$

$$+ \underbrace{5}\cdot p\big(F1=\text{non } 0 \text{ e } F2=0 \text{ e} \dots \text{ e } F5=0 \mid P=00 \text{ e } (M=BO \text{ o } BB)\big)$$

può essere non 0
F1 / F2 / F3 / F4 / F5

$$= \underbrace{p(F1=0 \text{ e} \dots \text{ e } F5=0 \mid P=00 \text{ e } M=BO)}_{(1/2)^5} \cdot \frac{2bo}{b^2+2bo}$$

$$+ \underbrace{p(F1=0 \text{ e} \dots \text{ e } F5=0 \mid P=00 \text{ e } M=BB)}_{0} \cdot \frac{b^2}{b^2+2bo}$$

$$+5\cdot\Big(\underbrace{p\left(F1=\text{non }0 \text{ e } F2=0 \text{ e}\dots\text{e } F5=0 \mid P=00 \text{ e } M=B0\right)}_{(1/2)^5}\cdot\frac{2b_0}{b^2+2b_0}$$

$$+\ \underbrace{p\left(F1=\text{non }0 \text{ e } F2=0 \text{ e}\dots\text{e } F5=0 \mid P=00 \text{ e } M=BB\right)}_{0}\cdot\frac{b^2}{b^2+2b_0}\Big)$$

Funzione $f: X \to Y$ legge che associa a ogni el. di X uno di Y.

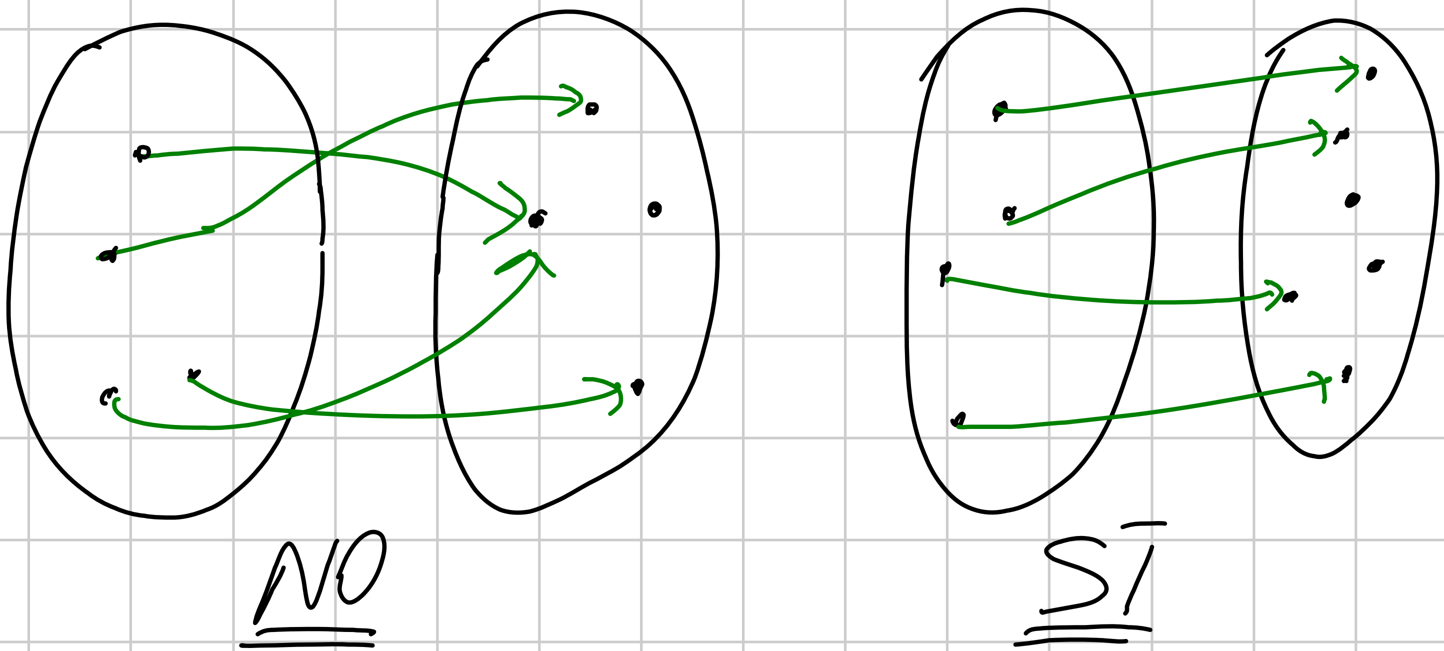
f iniettiva se • punti diversi di X vanno in pti diversi di Y

cioè $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

- punti con immagine uguale sono uguali

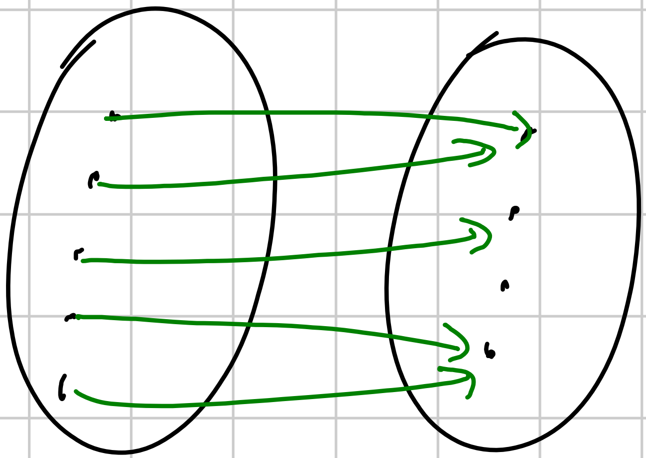
  cioè $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

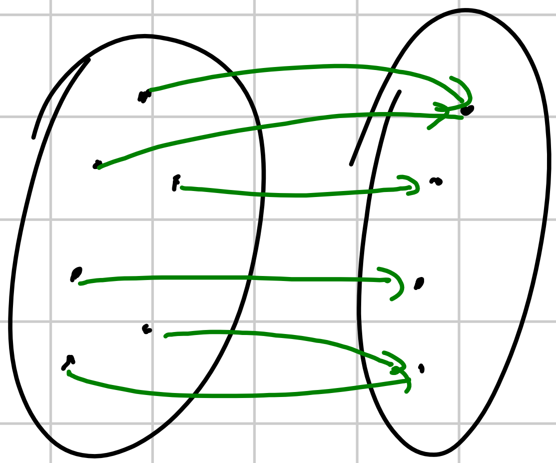
- ogni el. di Y è immagine di al più un el. di X



Surgettiva se • ogni el. di Y è immagine di qualche el. di X

cioè $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$ —





NO

SI

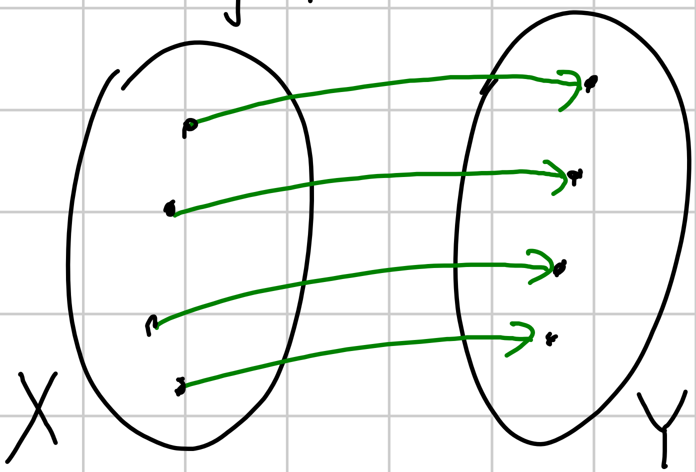
bigettiva : iniettiva e surgettiva.

invertibile : $\exists g : Y \to X$ t.c.

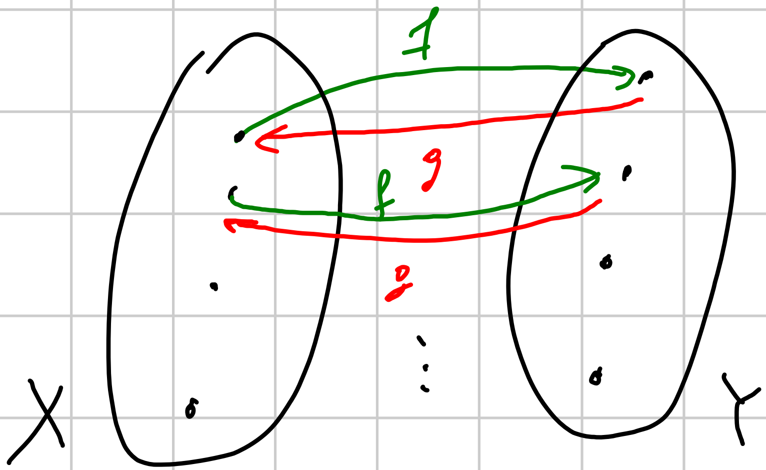
$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in X$$

$$(f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in Y.$$

bigettiva:



invertibile:



Attenzione: una $f: X \to Y$ non è solo l'espressione di f; contano anche X = dominio

Y = codominio.

(6) $f(x) = x^2$ $\quad f: A \to B$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = x^2$ OK

no iniettiva: $f(1) = f(-1)$

no surj. $\quad -1 \notin \mathrm{Im} f$ $\quad (3 \notin \mathrm{Im} f)$

- $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad$ ok

  no iniett. $\quad$ non surg.

- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad$ ok

  iniettiva $\quad$ non surg.

- $f: \mathbb{Z} \to [1, +\infty)$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad$ No: $0^2 \notin [1, +\infty)$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad$ No: $0.1^2 \notin \mathbb{N}$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ OK

non iniettiva $f(-\sqrt{7}) = f(\sqrt{7})$

suriettiva no: $-1 \notin Im(f)$

- $f: \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ <u>NO</u>

- $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ OK

iniettiva <u>no</u> $f(-1) = f(1)$

suriettiva: SI

- $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ OK

  iniettiva : sì

  suriettiva : no, $-1 \notin \operatorname{Im} f$

- $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ OK

  iniettiva : sì

  suriettiva : sì

  biiettiva

⑧ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

- $f(1/2) = \dfrac{1 - 1/2}{1 + 1/2} = \dfrac{1/2}{3/2} = \dfrac{1}{3}$

- $\dfrac{1}{2} \overset{?}{\in} \mathrm{Im} f$. Cerco $x_{\in [0,1]}$ t.c. $f(x) = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} \qquad 2 - 2x = 1 + x$$

$$3x = 1 \qquad x = 1/3$$

$\underline{\underline{\text{Sì}}}$

• suriettiva? Dato $y \in \mathbb{R}$ qualsiasi cerco $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = y$.
(Se lo trovo sempre, sì; se no, no.)

$$\frac{1-x}{1+x} = y \qquad 1-x = y + xy$$

$$x(1+y) = 1-y \qquad \text{(sto cercando } x\text{)}.$$

Certamente x non esiste per $y = -1$:
f non suriettiva.

• (suriettiva) troviamo $\mathrm{Im}\, f$.
Ci chiediamo per quali $y \in \mathbb{R}$ esiste
$x \in [0,1]$ con $f(x) = y$.

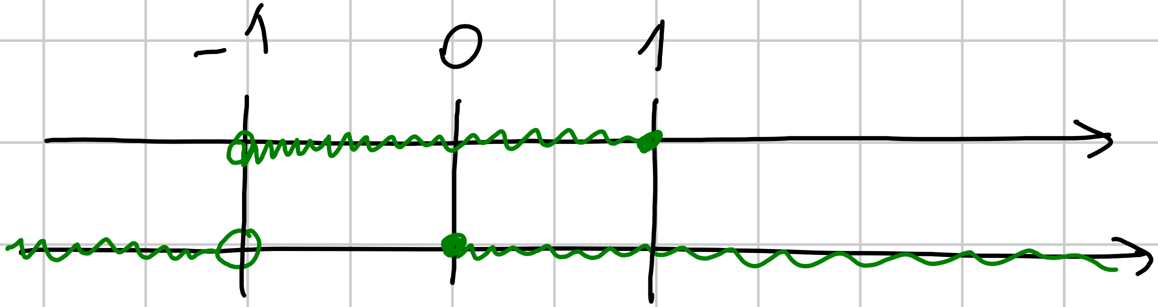
.... $x(1+y) = 1-y$

$y = -1$: <u>NO</u> ; $y \neq -1 \Rightarrow x = \dfrac{1-y}{1+y}$

ma voglio $x \in [0,1]$, dunque

$$0 \leq \frac{1-y}{1+y} \leq 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{1-y}{1+y} \geq 0 \\[2ex] 1 - \dfrac{1-y}{1+y} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1-y}{1+y} \geq 0 \\[2ex] \dfrac{y}{1+y} \geq 0 \end{cases}$$



$$0 \leq y \leq 1 \implies \operatorname{Im} f = [0,1]$$

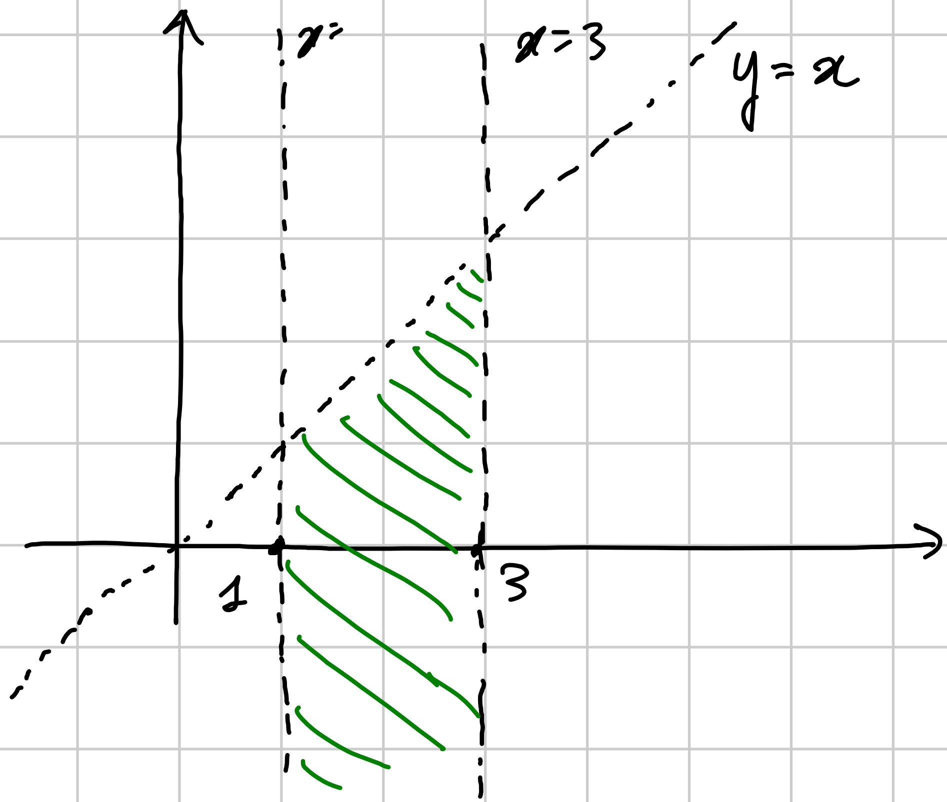
• f iniettiva? Dati $x_1, x_2 \in [0,1]$ con $f(x_1) = f(x_2)$
mi chiedo se ciò implichi che $x_1 = x_2$.

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} \Longrightarrow \cancel{1} + x_2 - x_1 - \cancel{x_1 x_2} = \cancel{1} - x_2 + x_1 - \cancel{x_1 x_2}$$

$$\Longrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Sì

(10) Disegnare: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x \leq 3 \ , \ y < x\}$



$$\{(x,y) : -2 \le y \le 3 \; , \; y \le |3x-1|\}$$