

Matematika A - 10/11/15

①

$$\begin{array}{ll} \text{omozipok} & : \quad n \\ \text{eltazipok} & : \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{totale:} \quad n + \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{n}{2} (2 + n - 1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

② genotipi	AA	AB	BB	
freq. gen. I	a	m	b	(a+m+b=1)
freq. gen. II	$a^2 + \frac{1}{2} 2am + \frac{1}{4} m^2$	...	...	
	$(a + \frac{m}{2})^2$	$2(a + \frac{m}{2})(b + \frac{m}{2})$	$(b + \frac{m}{2})^2$	
		$\cdot (b + \frac{m}{2})$		

Per quali valori le freq. della gen. II sono uguali alla I?

PRIMO MOD:
$$\begin{cases} (a + \frac{m}{2})^2 = a & 2(a + \frac{m}{2})(b + \frac{m}{2}) = m \\ (b + \frac{m}{2})^2 = b & (a+b+m=1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 1 - a - b \\ (2a + 1 - a - b)^2 = 4a \\ (2a + 1 - a - b)(2b + 1 - a - b) = 2(1 - a - b) \\ (2b + 1 - a - b) = 4b \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 1 - a - b \\ 1 + a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2ab = 4a \\ \vdots \end{cases} \quad \begin{cases} m = 1 - a - b \\ \underline{a^2 + 1 + b^2 = 2(a + ab + b)} \\ \underline{\hspace{10em}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ posso ricavare b e m da a

$$b = 1 + a - \sqrt{a} \quad m = 2(\sqrt{a} - a)$$

$\Rightarrow$ dipendente da un solo parametro

SECONDO MODO :

$$\text{"freq. gen. II} = \text{freq. gen. I"}$$

significa dire : siamo nell'equilibrio_

Se frequenza di A $\bar{u}$

e frequenza di B $\bar{1-u}$

le frequenze dei genotipi in equilibrio sono

AA

AB

BB

$$u^2$$

$$2u(1-u)$$

$$(1-u)^2$$

E si verifica facilmente che se

$$a = u^2 \quad m = 2u(1-u) \quad b = (1-u)^2$$

vale la relazione

$$a^2 + 1 + b^2 = 2(a + ab + b) \quad _$$

- ③ Supponendo di essere in una situaz. di equilibrio (per distribuzioni alleliche ignote) le frequenze dei gruppi A, B, AB, O possono essere qualsiasi (con somma 1)? OVVVERO, ad. es.

Una popolazione con

$$A = 30\%$$

$$B = 15\%$$

$$AB = 22\%$$

$$O = 33\%$$

può essere in equilibrio?

Supponiamo di avere frequenze alleliche a, b, o .

Allora $a + b + o = 1$ (2 parametri liberi) e

$$\begin{cases} A : & a^2 + 2ao \\ B : & b^2 + 2bo \\ AB : & 2ab \\ O : & o^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ non sono 3 liberi!
dipendono da 2

DATI A LEZIONE: A : 36% B : 17% AB : 7% O : 40%

$$\Rightarrow o = \sqrt{0.4} = 0.6324 \dots$$

$$a^2 + 2\sqrt{0.4} \cdot a - 0.36 = 0 \Rightarrow a = -\sqrt{0.4} + \sqrt{0.4 + 0.36} \\ = 0.2373 \dots$$

Cioè: da A e O trovo $o, a, b = 1 - o - a$

e allora B e AB devono essere: $b^2 + 2ob, 2ab$.

In questo caso:

$$b^2 + 2ob = 0.1786 \dots$$

(non 17%)

ERRORI

$$2ab = 0.0613 \dots$$

(non 7%)

GROSSI

(stesso per dati Wikipedia)

④ A, a alleli (A dominante)

A, a fenotipi

AA, Aa, aa genotipi

Sappiamo: $p(AA|A) = \frac{1}{2}$ $p(Aa|A) = \frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{l} p(\text{genotipo } AA | \text{fenotipo } A) = \frac{1}{2} \\ p(\text{genotipo } Aa | \text{fenotipo } A) = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Padre fenotipo A con madre fenotipo a

hanno 3 figli. Probabilità $P = AA$ se

- 3 figli tutti A
- 2 figli fenotipo A, uno a — impossibile —

3FA = evento "tre figli con fenotipo A"

$M = aa$ non lo inseriamo nelle probabilità (certo)

O = padre omozigote

Calcoliamo $p(O | 3FA) = \frac{p(O \text{ e } 3FA)}{p(3FA)}$

Sappiamo $p(3FA | O) = 1$

$$p(3FA | \text{non}(0)) = \frac{1}{8}$$

$$p(3FA \text{ e } 0) = p(3FA | 0) \cdot p(0) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p(3FA \text{ e } \text{non}(0)) = p(3FA | \text{non}(0)) \cdot p(\text{non}(0)) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$p(3FA) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}$$

$$p(0 | 3FA) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = \frac{8}{9}$$

⑤ freq. $a = q$ freq. $A = 1 - q$

"prob.^{che} genitori con fenotipo dominante danno
figlio con fenotipo recessivo"

$$p(F=aa \mid P=A \text{ e } M=A)$$

$$= \frac{p(F=aa \text{ e } P=A \text{ e } M=A)}{p(P=A \text{ e } M=A)}$$

$$\begin{aligned}
 = & \left(\cancel{p(F=aa \text{ e } I=AA \text{ e } M=AA)} \right. \\
 & + \cancel{p(F=aa \text{ e } I=Aa \text{ e } M=AA)} \\
 & + \cancel{p(F=aa \text{ e } I=AA \text{ e } M=Aa)} \\
 & \left. + p(F=aa \text{ e } I=Aa \text{ e } M=Aa) \right)
 \end{aligned}$$

$$p(I=A) \cdot p(M=A)$$

$$= \frac{p(F=aa \text{ e } I=Aa \text{ e } M=Aa)}{(1 - p(I=aa))^2}$$

$$\begin{aligned}
 & p(F=aa \mid P=Aa \text{ e } M=Aa) \cdot p(P=Aa \text{ e } M=Aa) \\
 = & \frac{(1-q^2)^2}{\frac{1}{4} \cdot (2q(1-q))^2} = \dots
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \text{ (a) } p(F=B \mid P=AB \text{ e } M=B)$$

$$(\text{Osservo: } p(F=A \mid P=AB \text{ e } M=B))$$

dipende dalle frequenze alleliche

"uelli B omozigoti" $\leadsto \sim 0$

"uelli B eterozigoti" $\leadsto \frac{1}{4}$)

$$\text{invece } p(F=B \mid P=AB \text{ e } M=B) = \frac{1}{2}$$

$$(b) \text{ due figli } B = \frac{1}{4}$$

$$(c) p(F1 = B \text{ e } F2 = A \mid P = AB \text{ e } M = B)$$

$$= p(F1 = B \mid P = AB \text{ e } M = B)$$

$$\cdot p(F2 = A \mid P = AB \text{ e } M = B)$$

$$= \frac{1}{2} \dots$$

Serve : la frequenza degli

omozigoti tra i B

1-a frequenza eterozigoti
tra i B

$$p(F=A \mid I=AB \text{ e } M=B)$$

$$= \frac{p(F=A \text{ e } I=AB \text{ e } M=B)}{p(I=AB) \cdot p(M=B)}$$

$$\left(p(F=A \text{ e } I=AB \text{ e } M=BB) + p(F=A \text{ e } I=AB \text{ e } M=B0) \right)$$

$$= \frac{\quad}{p(I=AB) \cdot p(M=B)}$$

$$= \frac{\left(p(F=A \mid I=AB \text{ e } M=BB) \cdot \cancel{p(I=AB)} \cdot p(M=BB) \right) + p(F=A \mid I=AB \text{ e } M=BO) \cdot \cancel{p(I=AB)} \cdot p(M=BO)}{\cancel{p(I=AB)} \cdot p(M=B)}$$

$$= 0 \cdot \frac{p(M=BB)}{p(M=B)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{p(M=BO)}{p(M=B)} = \frac{1}{4} (1-u)$$

Alto final $\frac{1}{4} (1-u)$

⑨ Gruppi sanguigni

freq. alleliche $a = 30\%$ $b = 10\%$ $o = 60\%$

$$(c) \quad p(P=O | F=\text{non}(O)) = \frac{p(P=O \text{ e } F=\text{non}(O))}{p(F=\text{non}(O))}$$

$$= \frac{p(F=\text{non}(O) | P=O) \cdot p(P=O)}{1 - o^2}$$

$$= \frac{\left(p(F=\text{non } O \text{ e } M=AA | P=O) + p(F=\text{non } O \text{ e } M=AB \dots) \right) \cdot o^2}{1 - o^2}$$

Y termini al numeratore si trattano
allo stesso modo