

Matematica A - 04/05/2016

Ese ① : X, Y variabili indipendenti.

$$Z = a \cdot X + b \cdot Y$$

$$\Rightarrow \mu(Z) = a \cdot \mu(X) + b \cdot \mu(Y)$$

$\Rightarrow$ Ho 4 esponenti tutti uguali a

t = uscite delle foto in lancio moneta

presi con pesi 1, 2, 4, 8

$$\Rightarrow \mu(X) = \underset{\substack{\text{"} \\ 1/2}}{\mu(t)} \cdot (1 + 2 + 4 + 8) = \frac{15}{2}.$$

$$(2) \quad \mu(X) = \frac{1}{3} \cdot k + \frac{1}{3} \cdot 2k + \frac{1}{3} \cdot 3k = 2k$$

$$\sigma^2(X) = \underset{\text{"}}{\mu(X^2)} - \underset{\substack{\text{"} \\ 4k^2}}{\mu(X)^2} = k^2 \left(\frac{14}{3} - 4 \right) = \frac{2}{3} k^2$$

$$\frac{1}{3} \cdot k^2 + \frac{1}{3} (2k)^2 + \frac{1}{3} (3k)^2$$

$$k^2 \cdot \frac{1+4+9}{3}$$

So che $\sigma^2(X) = \frac{8}{3}$ ho $\frac{2}{3}k^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow k^2 = 4$
 $\Rightarrow k = 2$

③ 5 monete da 1 Euro
 n senza valore

X = valore monete estratte a caso.

$$\mu(X) = 1 \cdot \left(\begin{array}{c} \text{prob. estraz.} \\ \text{monete da 1} \end{array} \right) + 0 \cdot \left(\begin{array}{c} \text{prob. estraz.} \\ \text{follone} \end{array} \right)$$

$$= \frac{5}{5+n}$$

So che $\mu(X) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{5+n} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow 20 = 5+n$$

$$\Rightarrow n = 15$$

④ $X = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ si risponde giusto e caso la k opzione
al

$$\mu(X) = \frac{1}{k}$$

$$X^2 = X$$

$$\Rightarrow \sigma^2(X) = \mu(X^2) - \mu(X)^2 = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

So che $\sigma^2(X) = \frac{3}{16}$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{k-1}{k^2} = \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow 3k^2 - 16k + 16 = 0$$

$$K_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16 \cdot 3}}{3} = \frac{8 \pm 4}{3}$$

4
3

⑤ $X = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ se esce uno dei k numeri
che ho scelto su 37
all'

$$X^2 = X$$

$$\mu(X) = \frac{k}{37}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{37} - \frac{k^2}{37^2} = \frac{270}{1369}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \end{array}$$

$$\Rightarrow 37k - k^2 = 270$$

$$\Rightarrow k^2 - 37k + 270 = 0$$

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 1080}}{2} = \frac{37 \pm \sqrt{289}}{2} \\ &= \frac{37 \pm 17}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 27 \\ \searrow 10 \end{array} \end{aligned}$$

$$k^2 - 37k + 270 = (k - \uparrow)(k - \uparrow)$$

prodotto 270
e somma 37
sono 27 e 10

⑥ Variabile binomiale di parametro p e

$$p(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

numero di modi
in cui posso scegliere
 k certi posti tra n

probabilità che
in k posti
fissi ci sia
successo

probabilità che
negli altri
 $n-k$ posti
ci sia
insuccesso

probabilità di avere in tutto
 k successi su n

$$\mu(X) = n \cdot p$$

In fatti:

$$\mu(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \cancel{k} \cdot \frac{n!}{\cancel{k!} (m-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{m-k}$$

(k-1)!

$$= \sum_{k=1}^n \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)! (n-1-(k-1))!} \cdot p \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! ((n-1)-(k-1))!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{h=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{h! ((n-1)-h)!} \cdot p^h \cdot (1-p)^{(n-1)-h}$$

$$\begin{aligned}
 &= n \cdot p \cdot \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} \cdot p^h \cdot (1-p)^{(n-1)-h} \\
 &= n \cdot p \cdot (p + (1-p))^{n-1} = n \cdot p. \quad \square
 \end{aligned}$$

⑦ Lancio 5 volte un dado
 Successo : punteggio maggiore di 4 $p = \frac{1}{3}$

Prob che ci siano due successi:

$$\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{8}{3^3} = \frac{80}{243}$$

$$\textcircled{8} \quad p = \frac{13}{30} \quad n = 7 \quad k = 3$$

$$\Rightarrow \binom{7}{3} \cdot \left(\frac{13}{30}\right)^3 \cdot \left(\frac{17}{30}\right)^4 \approx \dots$$

$$\textcircled{9} \quad p = \frac{7}{10}$$

12 esperimenti.

Voglio prob. di almeno 11 successi.

$$\Rightarrow \binom{12}{11} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{11} \cdot \frac{3}{10} + \binom{12}{12} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{12} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^0$$

↑
12
↑
1
↑
1

$$= \left(\frac{7}{10}\right)^{11} \left(12 \cdot \frac{3}{10} + 1\right) = \frac{23}{5} \left(\frac{7}{10}\right)^{11} = \dots$$

(10) $p = \frac{1}{4}$ $n = 5$ $K = 3, 4, 5$

$$\Rightarrow \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$= \dots \quad 10.35\%$$

(11) $p = \frac{2}{7}$ So che

$$\binom{n}{3} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{n-3} = \frac{160}{2401}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{n-3}$$

Provando i valori $n = 3, 4, \dots$ si vede che
 torna per $n = 4$

$$\frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{6}} \cdot \frac{8 \cdot 5}{7^4} = \frac{160}{2401}$$

$$4^9 = (50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$$

⑫ Valore atteso di pezzi difettosi al piano = $6/5$
Probabilità che un pezzo sia difettoso:

$$\frac{6}{5 \cdot 2000} = \frac{6}{10'000} = 0.06 \%$$

evento molto raro

$\Rightarrow$ posso usare Poisson

$$f(k) = e^{-6/5} \cdot \frac{(6/5)^k}{k!}$$

Stima la prob. che l'evento accada k volte.

(Attenzione: nelle formule delle distrib.
di Poisson non entra — e apparentemente —
il numero di esperimenti che faccio —

Ragione: entra il parametro

$$\lambda = n \cdot p$$

valore atteso numero di ripetizioni prob. dell'evento singolo

.)

domani viene diftoso : prob $f(0)$

domani viene 3 diftosi :

$$1 - \text{prob. domani } 0, 1, 2 : 1 - (f(0) + f(1) + f(2))$$

⑬ Con Poisson: quello che conta è il valore atteso.

$$\lambda = 5 \Rightarrow p(7 \text{ nei prossimi } 10 \text{ minuti}) = e^{-5} \cdot \frac{5^7}{7!} \approx 0.1$$

$$(14) \quad \frac{1}{35.000} = \text{poco} \Rightarrow \text{ok Poisson.}$$

$$\text{Value atten: } \frac{\overset{20}{100.000}}{\underset{7}{35.000}} = 2.85 \dots$$

$$\text{Prob}(4 \text{ sn } 100.000) = e^{-2.85 \dots} \cdot \frac{(2.85 \dots)^4}{4!}$$

$$\approx 15.95\%$$

(15)

4 bianche 7 nere

(a) estrazione di due bpgie senza reimpastione

X = bianche uscite.

$$p(X=0) = \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{110}$$

$$p(X=1) = \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{56}{110}$$

$$p(X=2) = \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{110}$$

$$42 + 56 + 12 = 110 \checkmark$$

(b) estrazione di due byte con reinserimento

Y = una uscite

$$p(Y=k) = \binom{2}{k} \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{2-k} \quad k=0, 1, 2$$

(16) Indovinare una cifer entro 3 tentativi:

X = tentativo a cui indovino

Y = tentativo a cui fermo

$$p(X=1) = \frac{1}{10}$$

$$p(X=2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$$

$$p(X=3) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$$

$$p(Y=1) = \frac{1}{10}$$

$$p(Y=2) = \frac{1}{10}$$

$$p(Y=3) = \frac{8}{10}$$

$$\mu(Y) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{8}{10} = \frac{27}{10} = 2.7$$

⑪ Prob d. colpire:

$\frac{1}{5}$	I colpo
$\frac{2}{5}$	II colpo
$\frac{4}{5}$	III colpo

X = prob. di colpire

Y = colpo e anni in fermo -

$$p(X=1) = \frac{1}{5}$$

$$p(X=2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$$

$$p(X=3) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{48}{125}$$

$$p(Y=1) = 1/5$$

$$p(Y=2) = 8/25$$

$$p(Y=3) = 1 - 1/5 - 8/25 = \frac{12}{25}$$

$$\mu(Y) = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{8}{25} + 3 \cdot \frac{12}{25} = \frac{57}{25}$$

18) Calcolare la distribuzione di probabilità dell'evento $X =$ prodotto dei numeri usciti lanciando 3 dadi.

Valori possibili di X : ...

E si è possibile del lancio di 3 dadi sono $6^3 = 216$.

X assume valori interi compresi tra

$$1 = \boxed{1} \times \boxed{1} \times \boxed{1}$$

$$216 = \boxed{\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}} \times \boxed{\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}} \times \boxed{\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}}$$

we non tutti: 7 non è realizzabile.

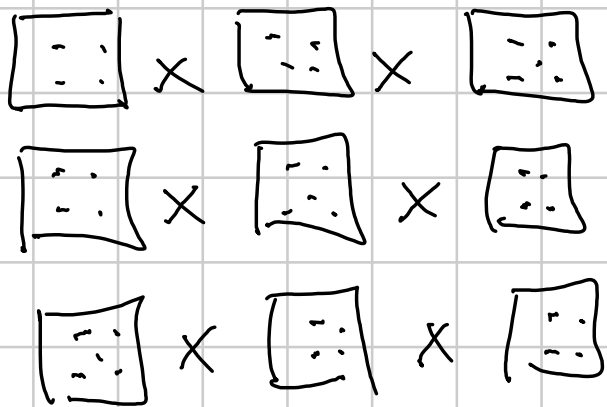
Bisogna: 1) elencare i numeri n tra 1 e 216
che sono prodotto di 3 interi tra 1 e 6
 $\wedge$
 p, q, r

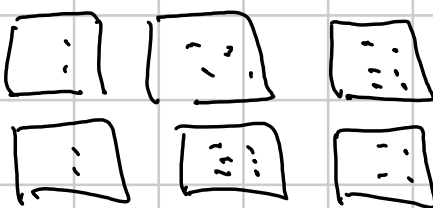
2) vedere in quanti modi si può
scrivere $n = p \cdot q \cdot r$
con $p \leq q \leq r$

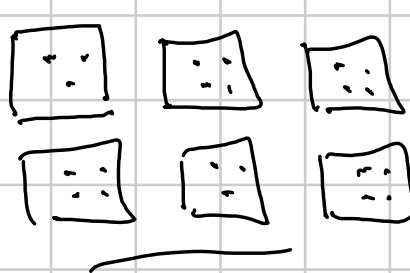
3) ogni tale modo contarla con peso

1	se	$p = q = r$
3	se	$p = q \neq r$
6	se	tutti diversi

Ex: $125 = 5 \times 5 \times 5 =$  $\frac{1}{216}$

$80 = 4 \times 4 \times 5 =$  $\frac{3}{216}$

$48 = 2 \times 4 \times 6$  $\dots$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{matrix}} \right\} 6$

$= 3 \times 4 \times 4$  $\left. \vphantom{\begin{matrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{matrix}} \right\} 3$

$\frac{9}{216}$