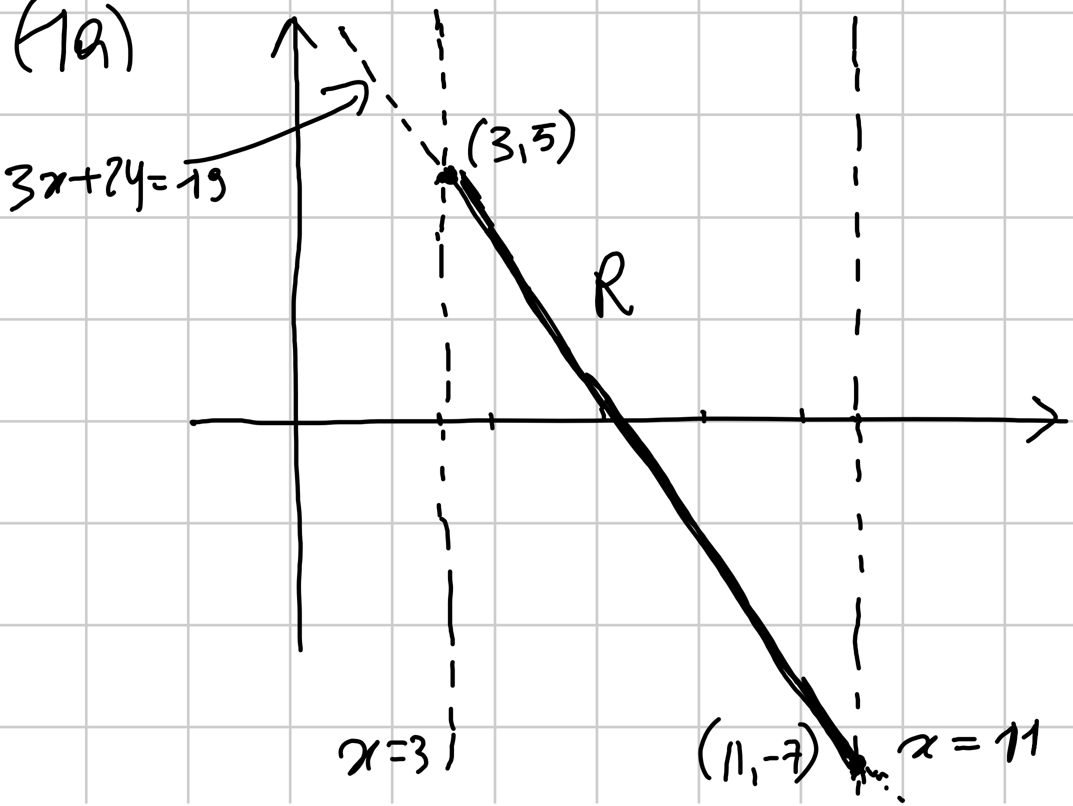
Matematica A - 1/12/15

(1a)



(3, 5)
(11, -7)

2

$g(x,y) = 4x - 3y$

max in $(11,-7)$
vale $44 + 21 = 65$

---

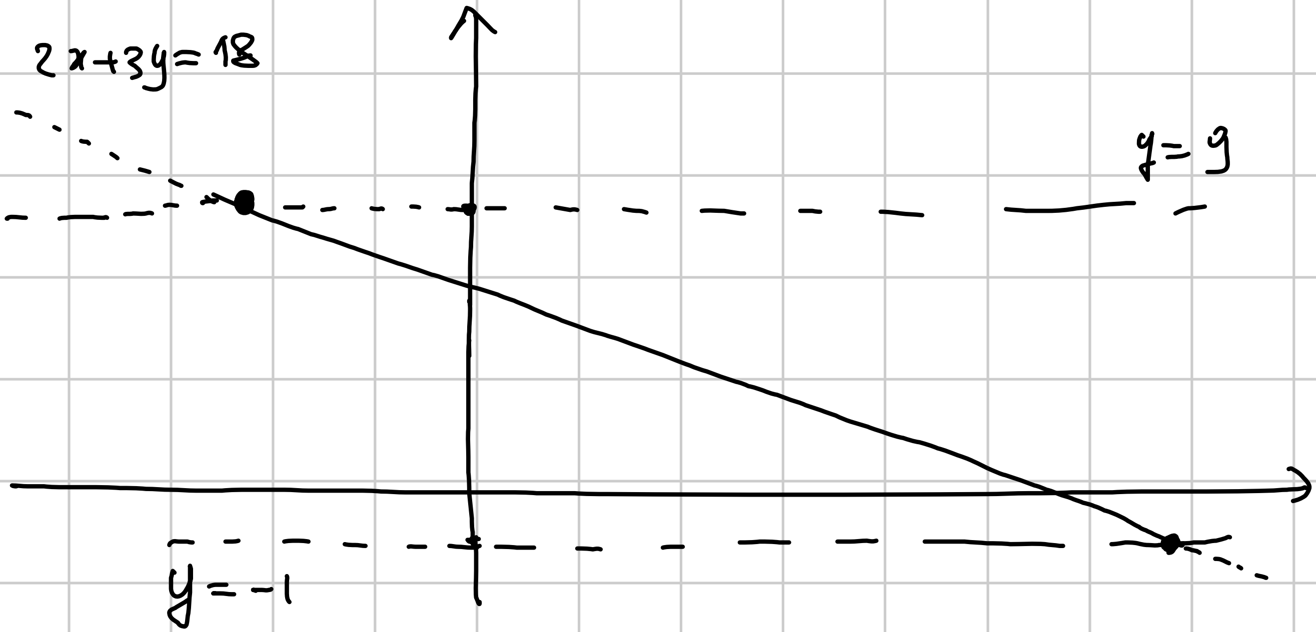
min in $(3,5)$
vale $12 - 15 = -3$

<u>Oss</u>: il max/min di funz. lineare $ax+by+c$ su un segmento è sempre assunto agli estremi.

(1b) R: $\begin{cases} 2x+3y = 18 \\ -1 \le y \le 9 \end{cases}$ $g(x,y) = x+2y$

$\left(\frac{21}{2}, -1\right)$

$\left(-\frac{9}{2}, 9\right)$

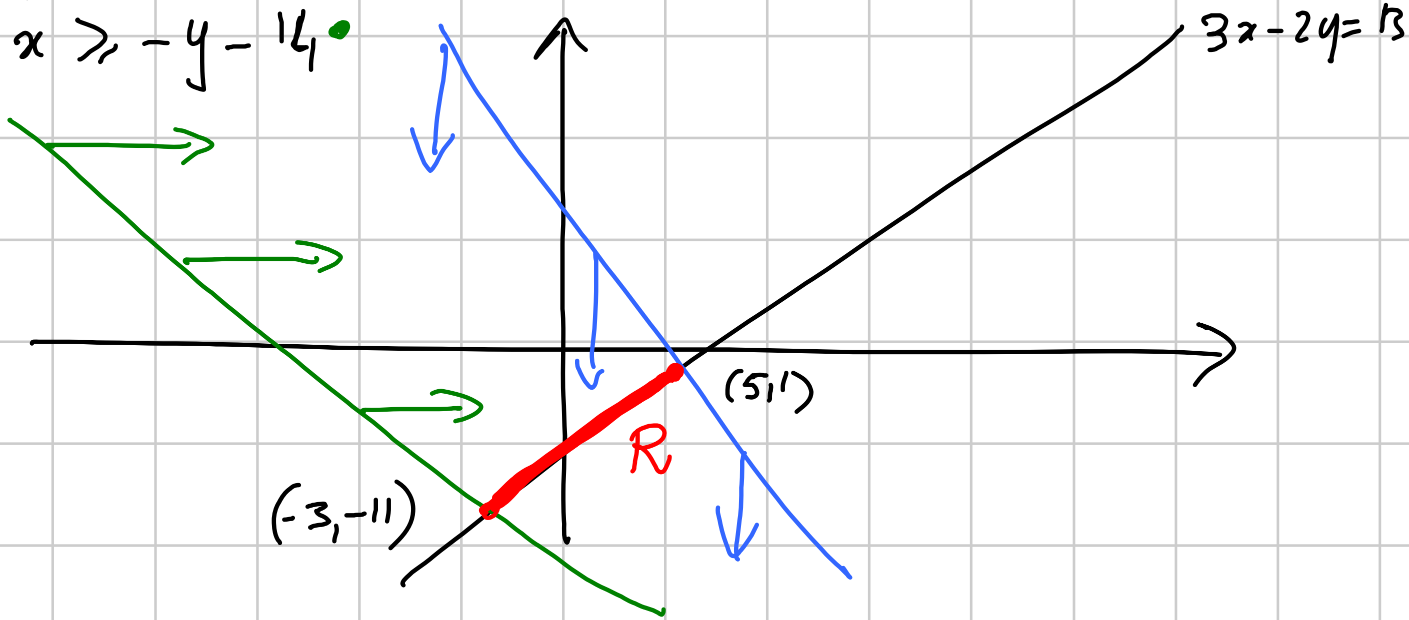


valori di g agli estremi : in $\left(\frac{21}{2},-1\right)$ vale $\frac{21}{2}-2=\frac{17}{2}$ <u>min</u>

in $\left(-\frac{9}{2},9\right)$ vale $-\frac{9}{2}+18=\frac{27}{2}$ <u>max</u>

(1 c) $R:\begin{cases} 3x-2y=13 \\ y\le 11-2x \\ x\ge -y-14 \end{cases}$

$g(x,y)=-x+4y$



$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ y = 11 - 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 22 + 4x = 13 \\ y = 11 - 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ x = -y - 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3y - 42 - 2y = 13 \\ x = -y - 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = -11 \end{cases}$$

$$g(x,y) = -x + 4y$$

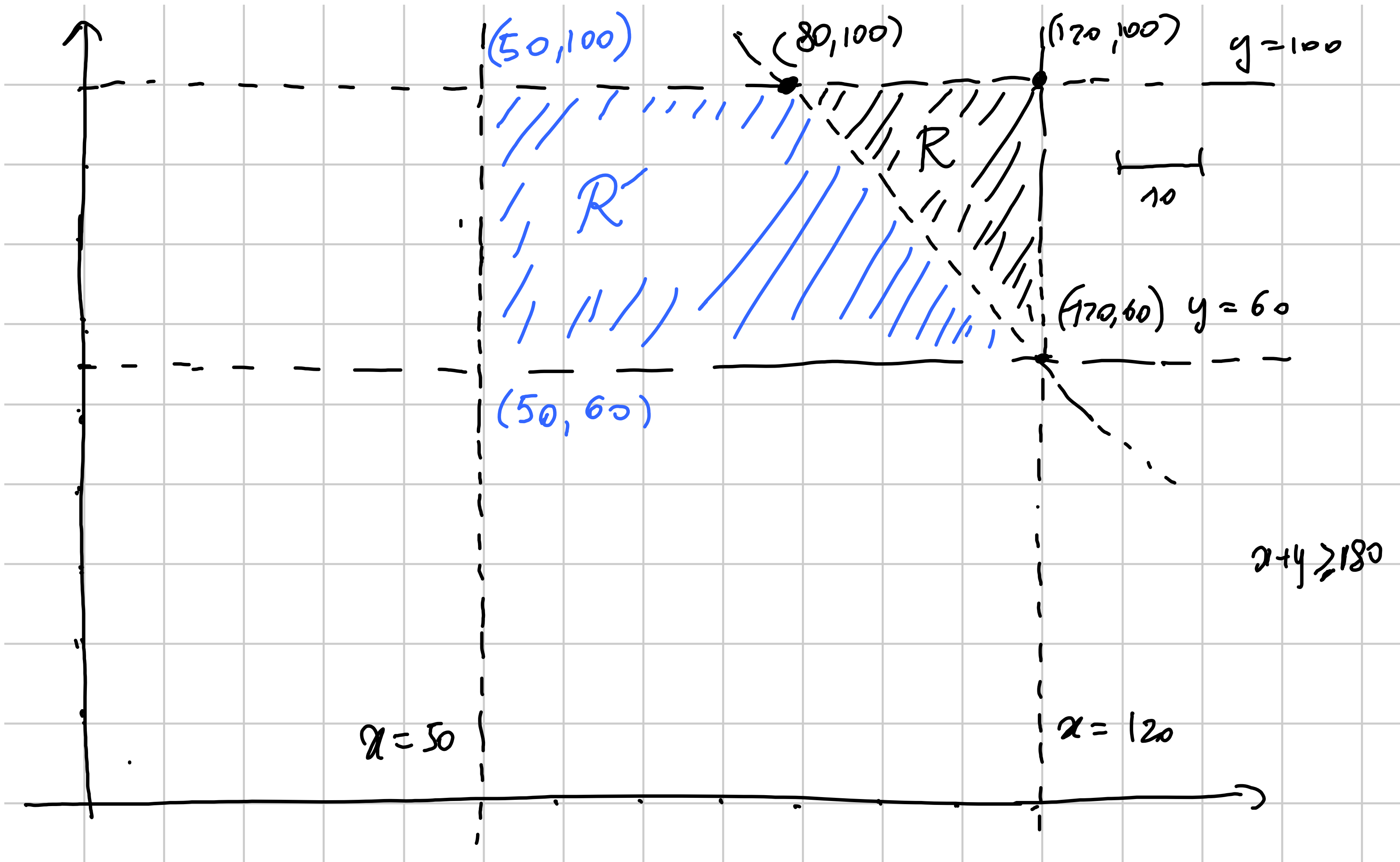
agli estremi:

in $(5,1)$ vale -1 max

in $(-3,-11)$ vale -41 min

(2) $R : \begin{cases} 50 \leq x \leq 120 \\ 60 \leq y \leq 100 \\ x + y \geq 180 \end{cases}$

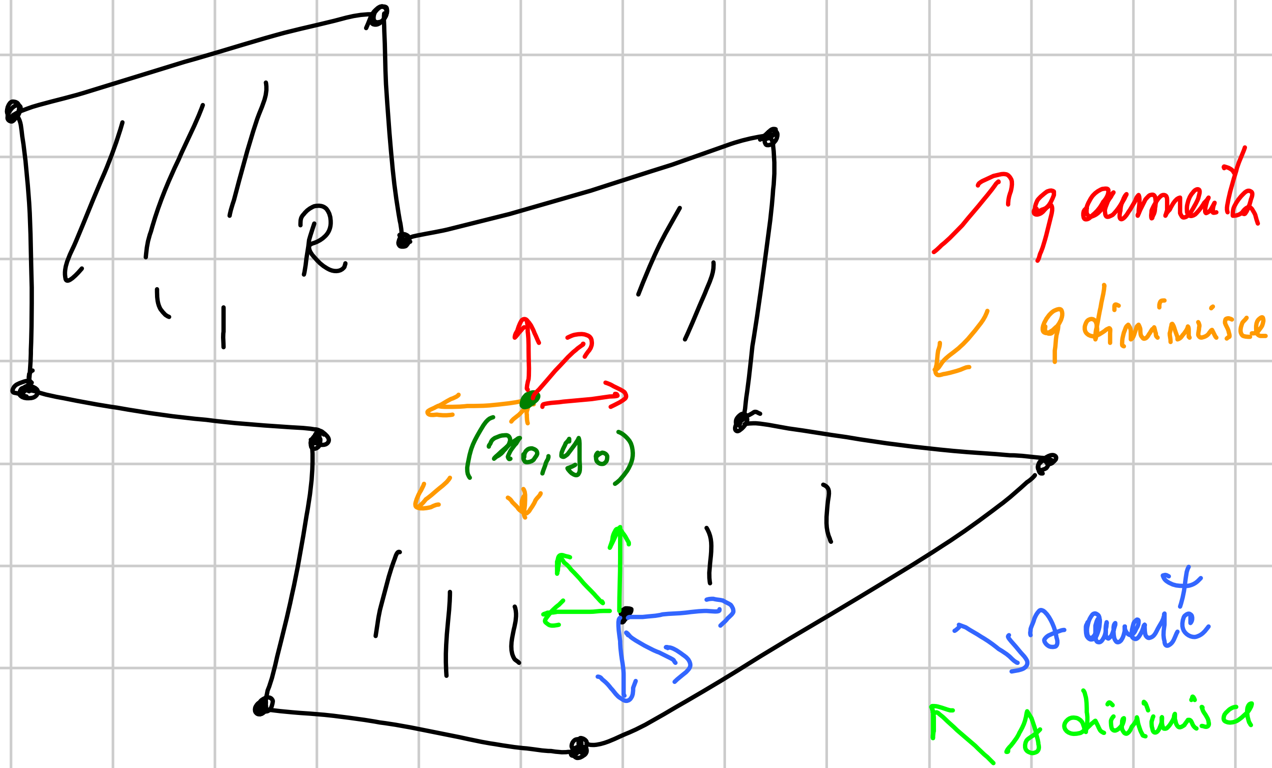
$- 15x + 30y$



(50,100)
(80,100)
(120,100)
y=100
R
R
10
(120,60)
y=60
(50,60)
x+y ≥ 180
x=50
x=120

<u>Oss</u>: se ho una regione R delimitata da segmenti ma comprendente la parte interna, il max e il min su R di una funz. $\alpha x + \beta y$ sono sempre assunti sul bordo (cioè non su punti interni). Anzi, per quanto già detto, sono assunti sui vertici.

Spiegazione!



$$g(x,y) = 2x + 3y$$

$$f(x,y) = 7x - 3y$$

Per voi:

max/min di $-15x+30y$ su R si trovano calcolando i valori nei vertici:

$(120, 60)$	calcolo
$(120, 100)$	"
$(80, 100)$	"

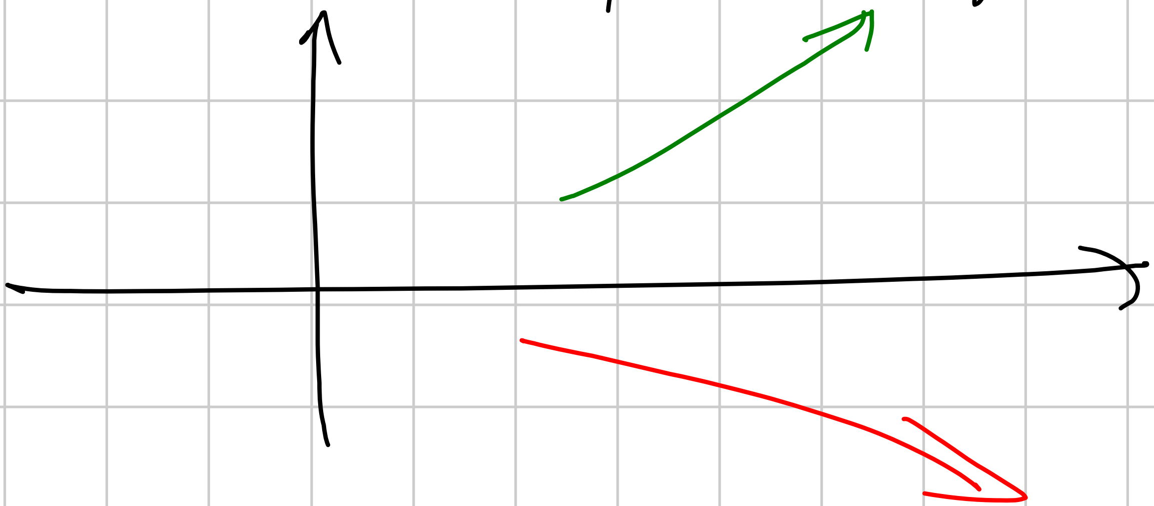
$$R' : \begin{cases} 50 \leq x \leq 120 \\ 60 \leq y \leq 100 \\ x+y \leq 180 \end{cases}$$

max/min di $-15x+30y$ su R' si trovano calcolando nei vertici

$(50,60)$, $(5,100)$, $(120,60)$, $(80,100)$

"Def" $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ significa: "per x molto grande (pos), $f(x)$ è molto grande (pos)"

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ significa: "per x molto grande (pos) $f(x)$ è molto grande neg"

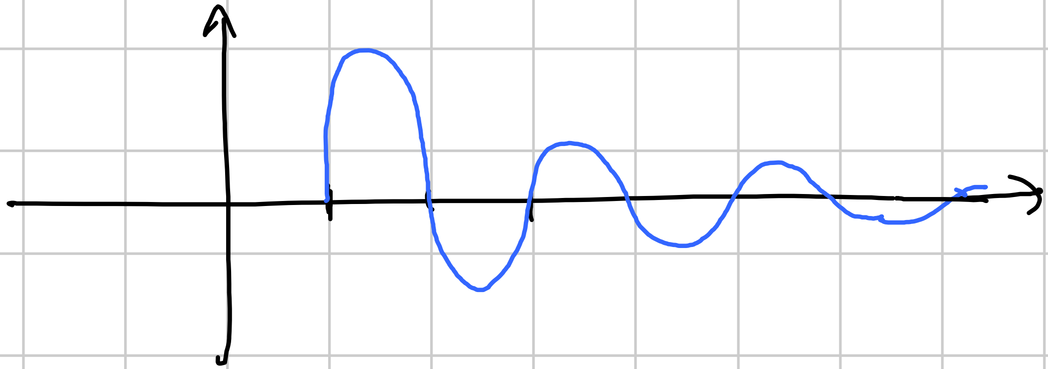


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad (L \in \mathbb{R})$$ se "per x molto grande (pos) $f(x)$ è molto vicino a L"

Es: $f(x) = \frac{10}{x} \cdot \operatorname{sen}(x)$

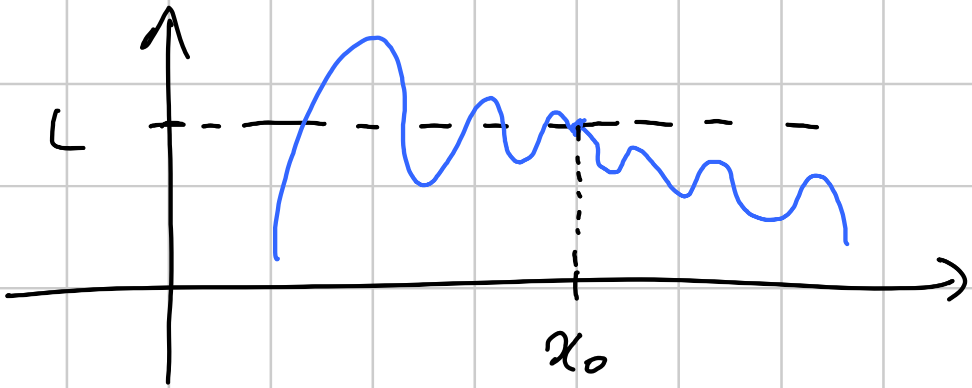
su $[\pi, +\infty$

π

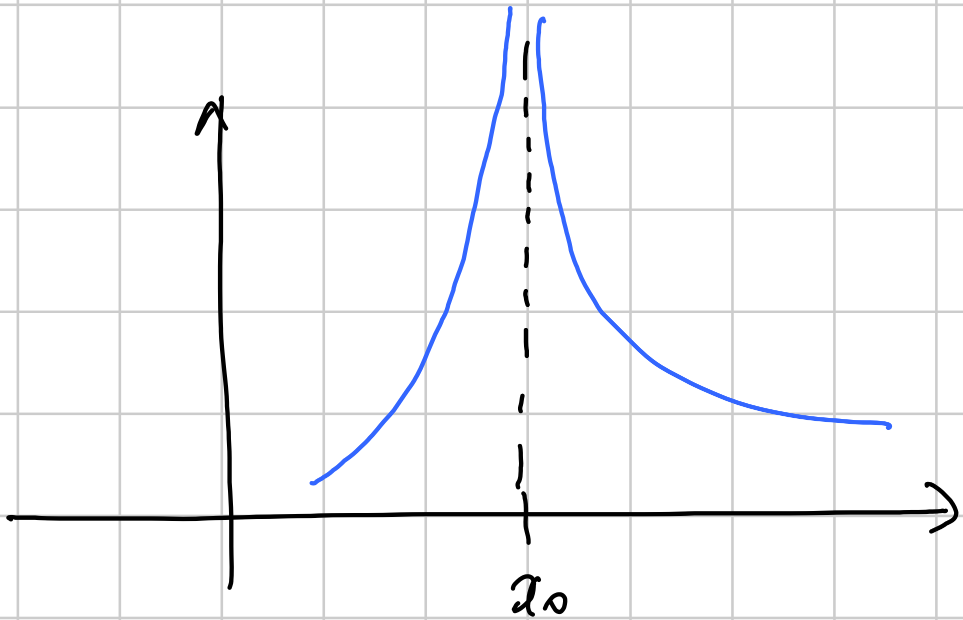


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Def: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se per x molto vicino a x_0, $f(x)$ è molto vicino a L



Def 1: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



(a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + g(x) \right) = +\infty$

Sì

(b)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$\overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + g(x) \right) = 0$

<u>No</u>: può fare qualsiasi cosa;

$f(x) = 2x$
$g(x) = -x$

$+\infty + (-\infty) = +\infty$

$f(x) = x$
$g(x) = -2x$

$(+\infty) + (-\infty) = -\infty$

$f(x) = x + L$
$g(x) = -x$

$(+\infty) + (-\infty) = L$

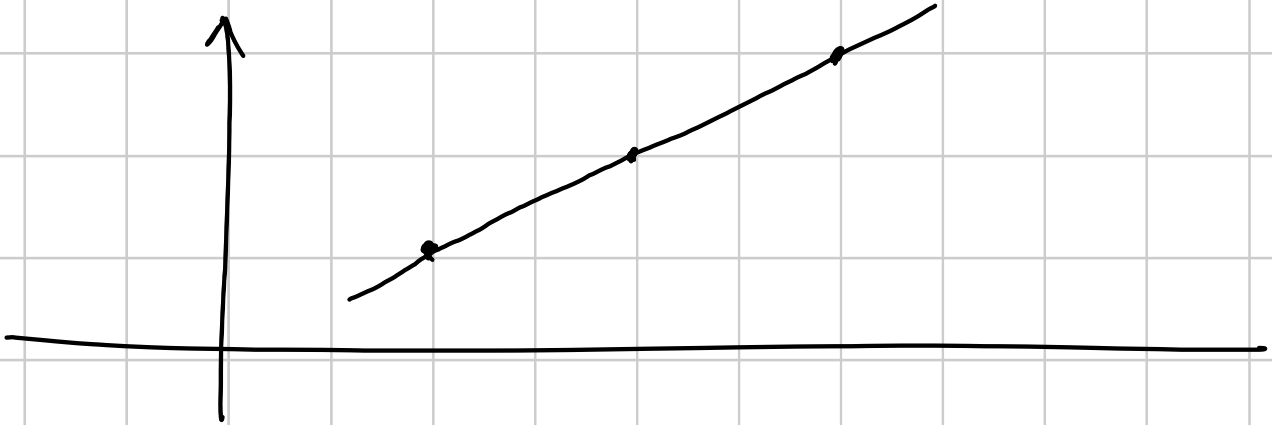
(c) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = +\infty$

Sì

(5)

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$
$f(x) = 4x^8 - 12x + \sqrt{19}$	$+\infty$	$+\infty$
$f(x) = -5x^6 + \sqrt{17}x^5 - \pi$	$-\infty$	$-\infty$
$f(x) = 9x^{17} - 41x^2 + 5$	$+\infty$	$-\infty$
$f(x) = -\sqrt{3}x^5 + x^4 + 100x^2$	$-\infty$	$+\infty$

OSS: per $n+1$ punti del piano con ascisse distinte passa il grafico di uno e un solo polinomio di grado $\leq n$.



- $(3,-1)$ $(2,5)$ $f(x) = ax + b$

$$\begin{cases} 3a + b = -1 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -6 \\ b = 17 \end{cases}$$

- $\left(\frac{1}{3}, -7\right)$ $(2,-2)$ $(-1,-11)$ $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} \frac{1}{9}a + \frac{1}{3}b + c = -7 \\ 4a + 2b + c = -2 \\ a - b + c = -11 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 3b + 9c = -63 \\ 4a + 2b + c = -2 \\ a - b + c = -11 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{III} \\ \text{I} \\ \text{II} \end{array}\begin{cases} b = a + c + 11 \\ a + 3a + 3c + 33 + 9c = -63 \\ 4a + 2a + 2c + 22 + c = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a + c + 11 \\ 4a + 12c = -96 \\ 6a + 3c = -24 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 3c = -24 \\ 2a + c = -8 \\ b = a + c + 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -8 - 2a \\ a - \cancel{24} - 6a = -\cancel{24} \\ b = a + c + 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ c = -8 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = 3x - 8$$

Def: $f(x)$ polinomio ha la radice x_0
se $f(x_0)=0$.

Fatto: in tal caso $f(x)$ è divisibile per $(x-x_0)$
cioè $f(x)=(x-x_0)\cdot f_1(x)$.

In tal caso:

$\Rightarrow f_1(x_0)\neq 0 \Rightarrow$ molt. di x_0 è 1

$\Rightarrow f_1(x_0)=0 \Rightarrow f_1(x)=(x-x_0)\cdot f_2(x)$

$$\Rightarrow f(x)=(x-x_0)\cdot f_2(x)$$

$\nearrow f_2(x_0) \neq 0 \implies \text{molt} = 2$

$\searrow f_2(x_0) = 0 \implies f_2(x) = (x - x_0) \cdot f_3(x)$

$\implies f(x) = (x - x_0)^3 \cdot f_3(x).$

In definitiva: la <u>molt.</u> di x_0 come radice di $f(x)$ è la massima potenza k per cui $(x - x_0)^k$ divide $f(x)$.

(7a) $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 3x + 1$

$x_0 = -1$

radice? $2 - 5 + 5 - 3 + 1 = 0$ Sì

	2	5	5	3	1
-1		-2	-3	-2	-1
	2	3	2	1	/

dunque $f(x) = (x+1)(2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$

-1 radice del quoziente?

$$-2+3-2+1=0 \qquad \text{Sì}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & 3 & 2 & 1 \\
-1 & & -2 & -1 & -1 \\
\hline
 & 2 & 1 & 1 &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow f(x) = (x+1)^{2}\,(2x^2+x+1)$$

-1 è radice di $2x^2+x+1$?

$$2 - 1 + 1 \neq 0 \quad \underline{\text{no}}$$

$\Rightarrow$ molt. di -1 come radice di $f(x)$ vale 2