Un'altra puntualizzazione sull'esercizio 6-(c) del 10/01/15

Ho detto che non è vero in generale che se X e Y sono indipendenti

$$p(X \text{ e } Y | Z) = p(X|Z) \cdot p(Y|Z).$$

Tuttavia è vero che

$$p(F1 = B \text{ e } F2 = A \mid P = AB \text{ e } M = BO)$$
$$= p(F1 = B \mid P = AB \text{ e } M = BO)$$
$$\cdot\, p(F2 = A \mid P = AB \text{ e } M = BO)$$

perché una volta conosciuti i genotipi dei genitori le uscite di due figli successivi sono davvero eventi fra loro indipendenti.

— o —

(2) Foglio 17/11/15 - svolgimenti omessi in aula

(a) $p(\text{non}(P)) = 1 - p(P) = 1 - p(P \cap M) - p(P \cap \text{non}(M))$

$$= 1 - \underbrace{p(P|M)}_{\text{noto}} \cdot \underbrace{p(M)}_{\text{noto}} - \underbrace{p(P|\text{non}(M))}_{\text{noto}} \cdot \underbrace{p(\text{non}(M))}_{\substack{1-p(M) \\ \text{noto}}}$$

(b) $$p(M|P) = \frac{p(M \cap P)}{p(P)} = \frac{p(P|M) \cdot p(M)}{p(P)}$$ tutti noti

(c) $p(P) = p(P|M) \cdot p(M) + p(P|\text{non}(M)) \cdot (1 - p(M))$

$$\Rightarrow p(M) = \frac{p(P) - p(P|\text{non}(M))}{p(P|M) - p(P|\text{non}(M))}$$ tutti noti

(3) (a) $p(M) = p(M \cap G) + p(M \cap \text{non}(G))$

$$= p(M|G) \cdot p(G) + p(M|\text{non}(G)) \cdot (1 - p(G))$$ tutti noti

(b) $$p(G|M) = p(G \cap M)/p(M) = \frac{p(M|G) \cdot p(G)}{p(M)}$$ tutti noti

(c) $p(M)^2$

④ (a) $a = 0.5$ $b = 0.4$ $r = 0.1$

(b) $p(F = \bar{V} \mid P = \bar{A} \text{ e } M = \bar{V})$

$= p(F = AB \mid P = AA \text{ e } M = AB) = \frac{1}{2}$

(c) $p(F = \bar{V} \mid P = \bar{R} \text{ e } M = \bar{R})$

$= p(F = AB \mid (P = RR \text{ o } RA \text{ o } RB)$

$\text{e } (M = RR \text{ o } RA \text{ o } RB)$

= somme di 6 termini di cui due soli non nulli e uguali tra loro

$$= 2 \cdot \frac{p(F = AB \mid P = RA \text{ e } M = RB) \cdot p(RA) \cdot p(RB)}{p(\bar{R})^2}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2ra \cdot 2rb}{(r^2 + 2ra + 2rb)^2}$$

⑤ $f : X \to Y$ invertibile $\Longleftrightarrow$ bijettive

$\Longrightarrow$ Sia $g : Y \to X$ l'inversa di f

f iniettiva : se $x_1, x_2 \in X$ e $f(x_1) = f(x_2)$ allora

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

f surgettiva : se $y \in Y$ allora $y = f(g(y))$

$\Leftarrow$ Dato $y \in Y$ chiamo $g(y)$ l'unico $x \in X$ t.c. $f(x) = y$.
Dico che g è l'inversa di f:

$f(g(y)) = y$ è per costruzione

$g(f(x)) = x$ perché posto $y = f(x)$ per definire $g(y)$ bisogna prendere $x' \in X$ t.c. $f(x') = y$, e allora si prende $x' = x$.

⑦ $\cancel{f(\mathbb{R})}$:

$\cancel{y = 3x^2 - 4x - 1}$

$\cancel{3x^2 - 4x - (1+y) = 0}$

$\cancel{x_{1,2}(y) = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3(1+y)}}{3}}$

~~ha soluzione per~~ $\cancel{4 + 3(1+y) \geq 0}$ ~~cioè~~

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 1 \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- $f^{-1}([-3, +\infty)) = \{x : 3x^2 - 4x - 1 \geq -3\}$
  $= \{x : 3x^2 - 4x + 2 \geq 0\} = \{x : x^2 + 2(x^2 - 2x + 1) \geq 0\}$
  $= \{x : x^2 + 2(x-1)^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$

- $f^{-1}((-\infty, -5]) = \{x : 3x^2 - 4x - 1 \leq -5\}$
  $= \{x : 3x^2 - 4x + 4 \leq 0\} = \{x : 2x^2 + (x-2)^2 \leq 0\} = \emptyset$

- $f^{-1}([2, +\infty)) = \{x : 3x^2 - 4x - 1 \geq 2\}$

$$= \{x : 3x^2 - 4x - 3 \geq 0\} = \{x : (x - x_1)(x - x_2) \geq 0\}$$

$$= (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+9}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$$

- $f^{-1}((-\infty, 1]) = \{x : 3x^2 - 4x - 1 \leq 1\}$

$$= \{x : 3x^2 - 4x - 2 \leq 0\} = \{x : (x - x_1)(x - x_2) \leq 0\}$$

$$= [x_1, x_2]$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+6}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

- $f^{-1}([0,6]) = \{x : 0 \leq 3x^2 - 4x - 1 \leq 6\}$

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+3}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$3x^2 - 4x - 1 = 6 \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+21}}{3} = \frac{2 \pm 5}{3} = \begin{cases} -1 \\ 7/3 \end{cases}$$

(9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=x^2-2x-3$

- $f(0)=-3$
- $x^2-2x-3=0 \qquad x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+3}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$ sì
- iniettiva: $\quad x_1^2-2x_1-3=x_2^2-2x_2-3$

$$\iff x_1^2-x_2^2=2x_1-2x_2$$

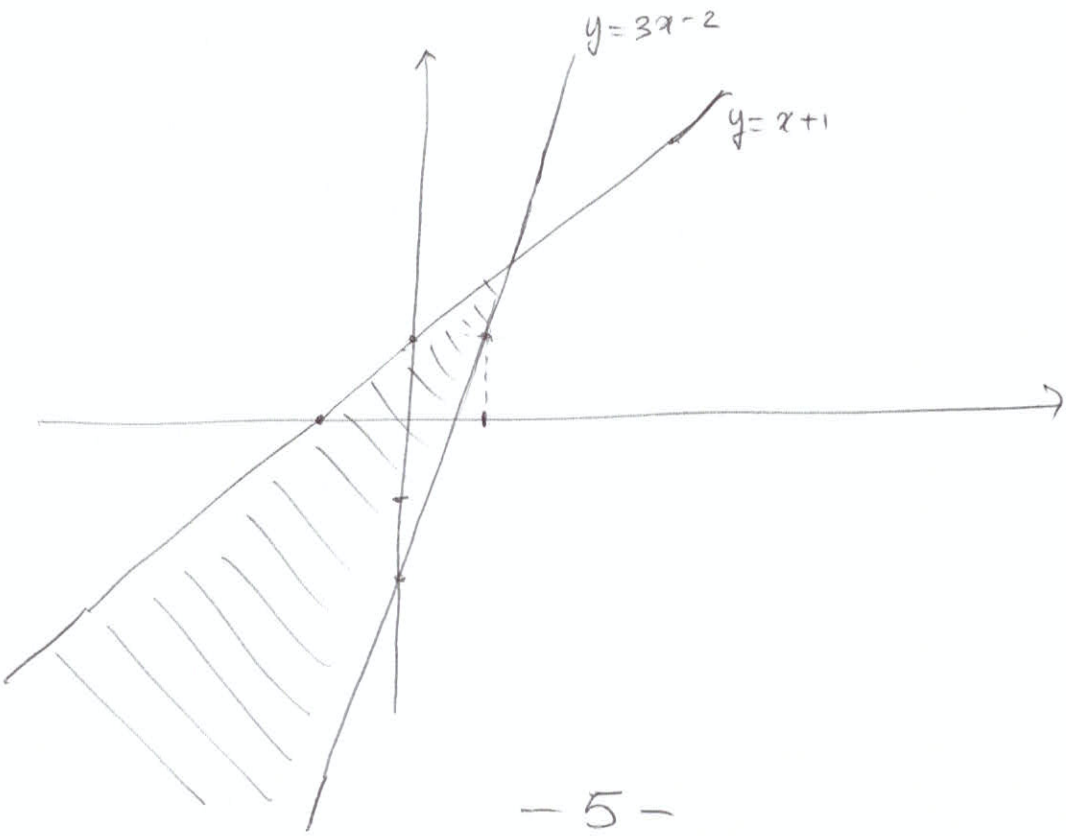
$$\iff (x_1-x_2)(x_1+x_2)=2(x_1-x_2)$$

$$\iff x_1=x_2 \quad \text{o} \quad x_1+x_2=2$$

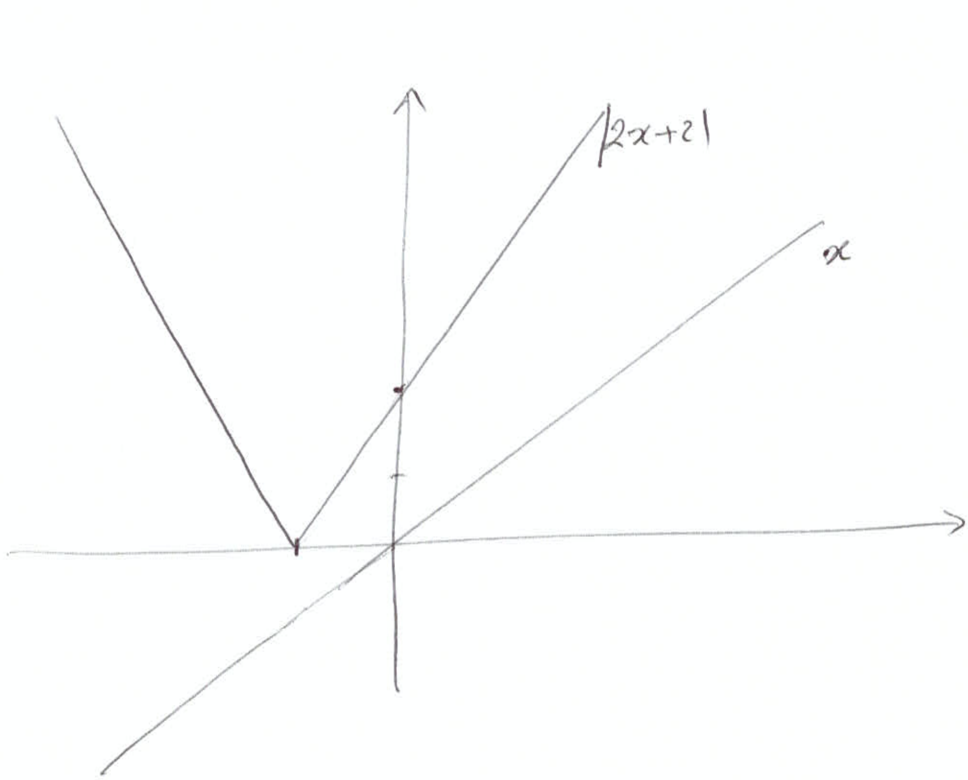
Quindi no: ad es $f(0)=f(2)$

suriettiva: $\quad -1000\notin \mathrm{Im} f$, no.

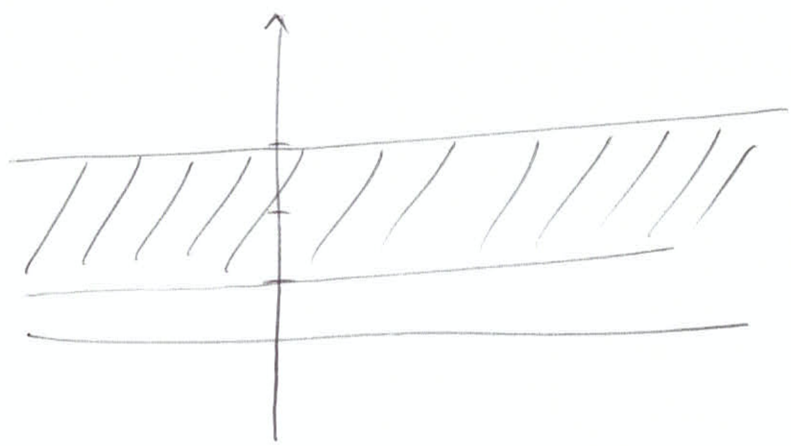
(10) $\{(x,y):\ x+1\le y\le 3x-2$



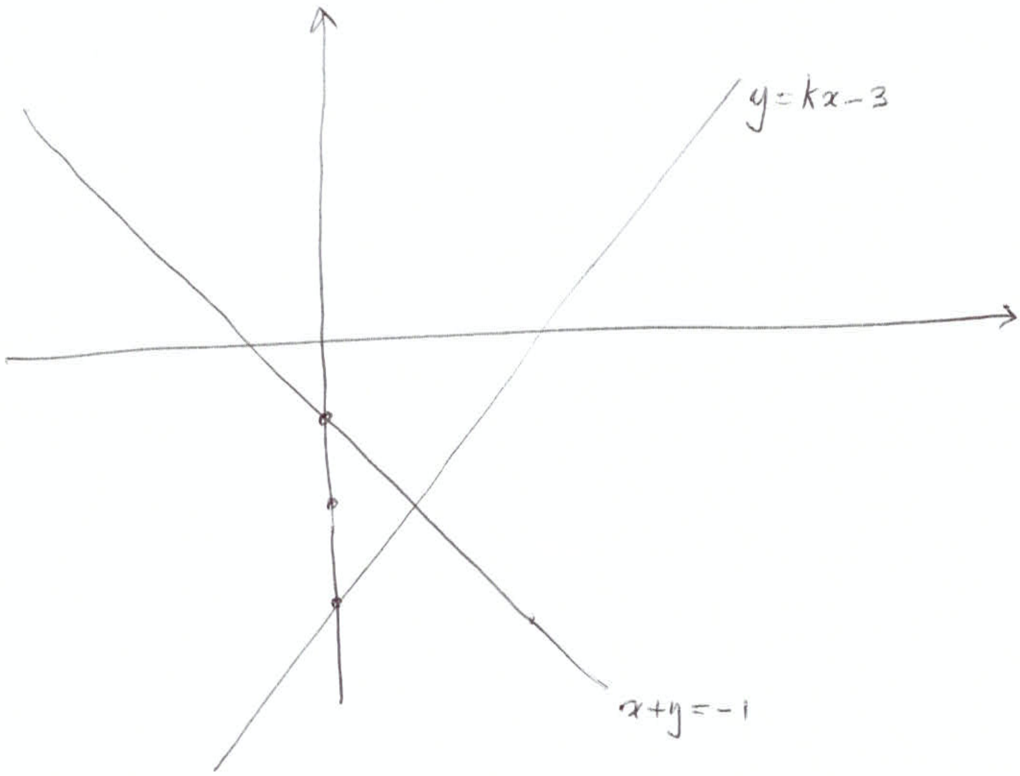
$$\{(x,y) : 1 \le y \le 3 \ , \ x \le |2x+2|\}$$



$\Rightarrow$



(7)



una soluzione per $k \neq -1$, nessuna per $k = -1$