

Esercizi di Matematica

Scienze Biologiche 15/16 – Corso A

(Carlo Petronio)

Foglio del 17/11/2015

I prossimi esercizi 1-4 sono tratti dalle prove d'esame degli ultimi anni. Qui ne riassumo i testi.

Esercizio 1 (prova in itinere gennaio 2015) In una popolazione per i gruppi sanguigni si hanno le frequenze $p(A) = 0.45$ e $p(O) = 0.04$. Siano a , b , o le frequenze degli alleli A , B , O . Sia F il figlio di P e M . Calcolare:

- a , b , o , $p(B)$ e $p(AB)$
- $p(F = AB|P = A \text{ e } M = B)$
- $p(P = A|F = O)$

Infine calcolare la probabilità che un padre O e una madre B abbiano, su 5 figli, almeno 4 del gruppo O .

Esercizio 2 (prova in itinere febbraio 2015)

Sappiamo che $p(P|M) = 0.9$ e $p(P|\text{non}(M)) = 0.1$.

- Sapendo che $p(M) = 0.01$ calcolare $p(\text{non}(P))$.
- Sapendo che $p(M) = 0.01$ calcolare $p(M|P)$.
- Sapendo che $p(P) = 0.15$ calcolare $p(M)$.

Esercizio 3 (appello luglio 2014)

Sapendo che $p(G) = 2/3$, $p(M|G) = 0.1$ e $p(M|\text{non}(G)) = 0.2$, calcolare:

- $p(M)$
- $p(G|M)$
- $p(M)^2$

Esercizio 4 (appello giugno 2013) Per un locus ci sono tre alleli R, A, B . I genotipi RR, RA, RB danno il fenotipo \bar{R} , inoltre AA dà \bar{A} , mentre BB dà \bar{B} , e infine AB dà \bar{V} . Conosciamo le frequenze fenotipiche

$$p(\bar{R}) = 0.19 \quad p(\bar{A}) = 0.25 \quad p(\bar{B}) = 0.16 \quad p(\bar{V}) = 0.4.$$

Un padre P e una madre M hanno un figlio F . Calcolare:

- le frequenze alleliche r, a, b provando che la popolazione è in equilibrio
- $p(F = \bar{V} | P = \bar{A} \text{ e } M = \bar{V})$
- $p(F = \bar{V} | P = \bar{R} \text{ e } M = \bar{R})$

* * *

Esercizio 5 Provare che una funzione è invertibile se e solo se è bigettiva.

Esercizio 6 Considerare la funzione $f : A \rightarrow B$ data da $f(x) = x^2$, dove A e B sono come nei casi specificati nel seguito, per ciascuno dei quali si chiede di verificare se la definizione di f ha senso e se f sia iniettiva, surgettiva, bigettiva:

- $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}$
- $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$
- $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$
- $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$
- $A = \mathbb{Z}, B = [1, +\infty)$
- $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}$
- $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$
- $A = \mathbb{R}, B = [1, +\infty)$
- $A = \mathbb{R}, B = [0, +\infty)$
- $A = [0, +\infty), B = \mathbb{R}$
- $A = [0, +\infty), B = [0, +\infty)$

Esercizio 7 Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$ determinare $f^{-1}(A)$ in ciascuno dei seguenti casi:

- $A = \mathbb{R}$
- $A = [-3, +\infty)$
- $A = (-\infty, -5]$
- $A = [2, +\infty)$
- $A = (-\infty, 1]$
- $A = [0, 6]$

I prossimi esercizi 8-11 sono tra quelli proposti alla fine della prima lezione sulle funzioni, di cui riassumo qui i testi.

Esercizio 8 Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

- Calcolare $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Dire se $\frac{1}{2}$ appartenga all'immagine di f
- Dire se f sia surgettiva
- Dire se f sia iniettiva

Esercizio 9 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Calcolare $f(0)$
- Dire se 0 sia nell'immagine di f
- Dire se f sia iniettiva, surgettiva, invertibile

Esercizio 10 Nel piano cartesiano disegnare

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, y < x\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 3, y \leq |3x - 1|\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \leq y \leq 3x - 2\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 3, x \leq |2x + 2|\}$$

Esercizio 11 Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} kx - y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}$$