

Ese. Alg. Lin. 30/8/15

1.2.1 Verificare le proprietà di gruppo commut.
per $\mathbb{R}^2$ con $+$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) \\ y_1 + (y_2 + y_3) \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + x_3 \\ (y_1 + y_2) + y_3 \end{pmatrix}$$

uguale?

NUOVA

VECCHIA

si

$$\textcircled{4} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\parallel \quad \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \quad \quad \quad \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix}$$

no

1.4.1 Prova che $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right) \in \mathbb{Q}$
 $\forall m$

$$= \frac{1}{2^m \cdot \sqrt{5}} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left((\sqrt{5})^k - (-\sqrt{5})^k \right)$$

$$= \frac{1}{2^m \cdot \sqrt{5}} \sum_{k=0}^m 2 (\sqrt{5})^k$$

$$= \frac{1}{2^m \sqrt{5}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^m 2 \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5})^{k-1}$$

$$= \frac{1}{2^m \sqrt{5}} \sum_{\dots} 2 \cancel{\sqrt{5}} \cdot 5^{\frac{k-1}{2}} \in \mathbb{Q}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(1+\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{1}_{1, 1}^{n-k} \cdot (\sqrt{5})^k$$

2.1.1/2 Verificare che l'opposto additivo e
l'inverso moltiplicativo di un numero $\neq 0$
sono unici. Devo vedere.

$$x + q = y + q = 0 \implies x = y$$

$$q \neq 0, \quad x \cdot q = y \cdot q = 1 \implies x = y$$

Mostro di più (regole di cancellazione):

$$1. \quad x + q = y + q \implies x = y$$

$$2. \quad x \cdot q = y \cdot q, \quad q \neq 0 \implies x = y$$

Infakt:

1. $\exists (-a)$ proprieta 2

$$x+a = y+a \Rightarrow (x+a)+(-a) = (y+a)+(-a)$$

$$\Rightarrow x+(a+(-a)) = y+(a+(-a))$$

$$\Rightarrow x+0 = y+0 \Rightarrow x = y$$

proprieta 1

2. $\exists a^{-1}$ proprieta 6

$$x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x \cdot a \cdot a^{-1} = y \cdot a \cdot a^{-1} \Rightarrow x \cdot 1 = y \cdot 1$$

$$\Rightarrow x = y$$

2.1.3. $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ $+$, $\cdot$ date da

$$0+0=0 \quad 0+1=1 \quad 1+0=1 \quad 1+1=0$$

$$0 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 0 \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$$

($0 = \text{pari}$ $1 = \text{dispari}$)

Provere che $\mathbb{F}_2$ è un campo (vd p. 40 1-9)

8. $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y$ ✓

9. $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$?

$$1 \cdot (1+1) \neq 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 1.0 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \end{array}$$



_____ 0 _____

Products in $\mathbb{R}[x]$

$$(3 - x + 4x^2) \cdot (5 + 2x - 7x^3)$$

$$= 15 + 6x - 21x^3 - 5x - 2x^2 + 7x^4 + 20x^2 + 8x^3 - 28x^5$$

$$= 15 + x + 18x^2 - 13x^3 + 7x^4 - 28x^5$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$$

$$= a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\ + \dots + (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots + a_m b_0) x^m + \dots$$

(sto convenendo che assunto tutti
gli a_m e b_m ma nulli da
un certo punto)

Cioè:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \cdot x^n \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k \cdot b_{m-k} \right) x^m$$

2.2.1. Provar che $\mathbb{R}[x]$ con $+$, $\cdot$
 soddisfa le 1-9 di campo tranne
 6 (esistenza inverso moltiplicativo)

3. Associative somma

$$p(x) + (q(x) + r(x)) = (p(x) + q(x)) + r(x)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \left(\sum b_n x^n + \sum c_n x^n \right) \\ \neq \left(\sum a_n x^n + \sum b_n x^n \right) + \sum c_n x^n$$

$$\sum a_n x^n + \sum (b_n + c_n) x^n \neq \sum (a_n + b_n) x^n + \sum c_n x^n$$

$$\sum (a_n + (b_n + c_n)) x^n \neq \sum ((a_n + b_n) + c_n) \cdot x^n$$

Si per associativa $\mathbb{L}$ + $\mathbb{L}$ oe numeri

1. $0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x]$ è el neutro di +

5. $1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x]$ $\bar{1}$ è il neutro di $\cdot$

Non vale la 6:

se $p(x)$ è non costante ($\deg(p(x)) > 0$)
poiché $\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x)) > 0$

ho che $p(x)$ non ha $\forall q(x) \neq 0$ inverso moltiplicativo.
Ad. es x -

2.3.1 Provenire che $n! > 2^n \quad \forall n \geq 4$.

$$n=4 \quad 24 > 16 \quad \checkmark$$

$$n=5 \quad 24 \cdot 5 > 16 \cdot 2 \quad \checkmark$$

$$n=6 \quad 24 \cdot 5 \cdot 6 > 16 \cdot 2 \cdot 2 \quad \checkmark$$

$$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{\substack{24 \\ \checkmark \\ 16}} \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad \dots \quad n$$
$$\quad \quad \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \quad \quad \checkmark$$

$$2^n = \underbrace{2 \quad 2 \quad 2 \quad 2}_{\substack{24 \\ \checkmark \\ 16}} \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad \quad \quad 2 \quad \checkmark$$

2.3.2 Prova che se $x, y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}$, $y \notin \mathbb{Q}$
 $\Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$

Per assurdo

Sufficienza: Supponiamo che $x + y \in \mathbb{Q}$.

Sappiamo inoltre che $x \in \mathbb{Q}$.

Dunque $-x \in \mathbb{Q}$.

($\mathbb{Q}$ campo: proprietà 2)

Allora $\underbrace{(x+y) + (-x)}_y \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ campo)

ASSURDO.