

Alg. Lim

30/9/2015

RICEVIMENTO

CALLEGARO

MER.

16:30 - 18:30

GIO

9:30 - 10:30

UFF. 401

DIP. MAT.

EDIFICIO A

EMAIL

CALLEGARO@DM.UNIPI.IT

# Tecniche di dimostrazione

## • Argomento diretto

$$\text{Prop} \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^5 k &= 0 + 1 + 2 + \dots + 5 = \\ &= 15 = \frac{5 \cdot (5+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = 0 + 1 + 2^2 + \dots + n^2$$

Dim Chiamo  $S_n$  la somma

$$\sum_{k=0}^n k$$

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

$$S_n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 + 0$$

$$2 S_n = \underbrace{n + n + n + \dots + n + n}_{n+1}$$

$$2 S_n = n(n+1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

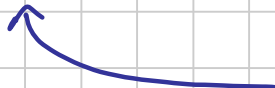
Dimostrazioni per **induzione**

Per dimostrare una Prop  $P(n)$  relativa a un intero

$n \in \mathbb{N}$  basta

( **Passo base** ) : Dimostr. che  **$P(0)$  è vera**

(Passo induttivo) : Per un generico mostro che  
supponendo vera  $P(n)$  (ipotesi induttiva) allora  
 $P(n+1)$  è vera.

Cioè provare " $P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n$ "  
 "implicare".

Per di funzione :

- \*  $P(0)$  è vera per il caso base
- \* applica passo induttivo  $P(0) \Rightarrow P(1)$ , allora  
che  $P(1)$  è vera

\* applico ancora il passo induttivo  $P(1) \Rightarrow P(2)$ ,  
quindi  $P(2)$  è vera

\* ...

Prop  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

DIN (per induzione)

$$P(n) = \left" \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right"$$

passo base:  $P(0) \quad "0 = \frac{0(0+1)}{2}" \quad \text{vera}$

Passo induttivo: supponiamo  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  per un qualche  $n$  generico  $P(n)$

Pero provare  $P(n+1)$  "  $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  "

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n+1} k} = \left( \sum_{k=0}^n k \right) + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

per ipotesi induttiva

$$= (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

ho mostrato  
 $P(n+1)$   
supponendo  $P(n)$

□

## Variente dell'induzione

Per provare che  $P(n)$

è vera

$$\forall n \geq N$$

intero  
fissato

Basta provare  $P(N)$ ,

p. base

$$P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \geq N$$

p. induttiva

$$\text{Prop} \quad n! \geq 2^n \quad \forall n \geq 4$$

$$\text{Dim} \quad P(n) : "n! \geq 2^n"$$

$$\text{Pesso base} \quad P(4) : "4! \geq 2^4"$$

$$24 \geq 16$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$$

$$n=3 \quad n! = 6$$

$$2^n = 8$$

Verità

Passo induttivo : suppongo vero  $n! \geq 2^n$  per  $n \geq 4$   
devo provare  $(n+1)! \geq 2^{n+1}$ .

In effetti

$$\boxed{(n+1)!} = n! \cdot (n+1) \quad (n \geq 4)$$
$$\geq \cancel{2^n} \cdot \cancel{2}^* = \boxed{2^{n+1}}$$

\*NOTA Poiché

sappiamo che  
 $n \geq 4$  vale anche  
 $n+1 \geq 5$  e  
quindi  
 $n+1 \geq 5 \geq 2$ , e  
dunque  $n+1 \geq 2$ .

Varianti : induzione completa.

Per dimostrare  $P(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$  basta



\* Dimostrare  $P(0)$

\* Suppongo vera  $P(k) \quad \forall k \leq n$ , con  $n$  generico  
e dimostro  $P(n+1)$  -

Def un intero  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$  è primo se  
in qualsiasi espressione

$$n = k \cdot h \quad , \quad k, h \in \mathbb{N}$$

si ha che  $k=1$  oppure  $h=1$  -

es 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Teo Ogni numero intero  $\bar{c}$  prodotto di numeri primi.

Dim  $P(n) = "$   $n$   $\bar{c}$  prodotto di primi  $"$

$$P(1) : 1 = 1$$

$$P(2) : 2 = 2$$

Suppongo vero  $\underbrace{P(k) \forall k \leq n}$  e dimostro  $P(n+1)$

tutti gli interi fino ad  $n$

si scrivono come prodotto di primi

$$\begin{aligned}
 n+1 &= \begin{cases} \text{è primo} \\ \text{non è un primo, } \exists h, k > 1, h, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{esiste} \\
 &\text{tali che } n+1 = h \cdot k \\
 &\Rightarrow h, k \leq n
 \end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva  $h, k$  sono prodotti di primi

$$h = p_1 \cdot p_2 \cdots p_a \quad (\text{prodotti di}$$

$$k = p'_1 \cdot p'_2 \cdots p'_b \quad \text{primi})$$

$\Rightarrow$  anche  $n+1$  è un prodotto di primi.  $\square$

$$n+1 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_a p'_1 p'_2 \cdots p'_b$$

ES  $P(k) \quad k \leq 50$  : i numeri  $1, \dots, 50$

si scrivono come prodotto di primi

$51 = 3 \cdot 17$  e da per induzione che  
3 e 17 sono prodotti di primi  
(in questo caso sono primi essi stessi)

Dimostrazioni per assurdo

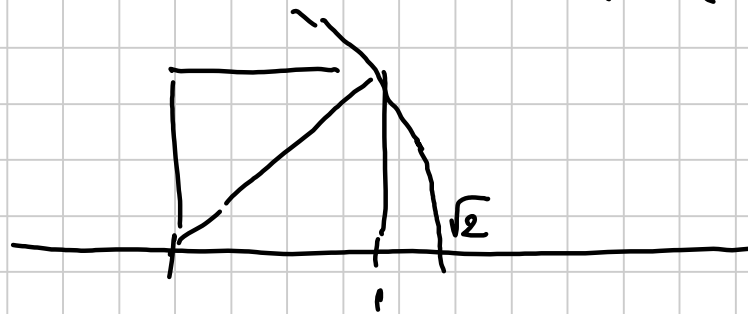
\* Per dimostrare una proposizione  $P$  supponiamo che  
 $P$  sia falsa e deduciamo la falsità di un  
fatto noto.

\* Per dimostrare l'implicazione  $Q \Rightarrow P$  possiamo supporre falsa  $P$  e deduciamo la falsità di  $Q$ , cioè dimostriamo

$$\text{"non } P \Rightarrow \text{non } Q\text{"}$$

(Prima versione = seconda  $Q = \text{"tutto quello che è vero"}\text{"})$

Prop l'equazione  $x^2 = 2$  non ha una soluzione  $x \in \mathbb{Q}$   
( $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ )



Dimostrazione per assurdo supponiamo  $x \in \mathbb{Q}$

$$x = \frac{h}{K} \quad \text{con } h, K \in \mathbb{Z}, \text{ primi tra loro}$$

$K \neq 0$

cioè non hanno fattori  
primi in comune

4 e 15 sono primi tra  
loro

2, 14 non sono primi  
tra loro

$$h_0 \quad \left(\frac{h}{K}\right)^2 = 2 \Rightarrow h^2 = 2K^2 \Rightarrow$$

$$h^2 \text{ è pari} \Rightarrow h \text{ è pari} \Rightarrow h = 2l, l \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (2l)^2 = 2K^2 \Rightarrow 4l^2 = 2K^2 \Rightarrow$$

$$2l^2 = K^2 \Rightarrow K^2 \text{ è pari} \Rightarrow K \text{ è pari}$$

Assurdo:  $K$  e  $h$  sono primi tra loro: non possono essere  
entrambi pari -  $\square$

Prop Esistono infiniti numeri primi.

Din Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_N$

$$K = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_N + 1$$

↑  
ultimo

$K$  è prodotto di numeri primi  $\Rightarrow K$  è divisibile per un certo  $p_i$  dell'elenco (finito) di primi scritti sopra

La divisione per  $p_i$  dà resto  $= 1$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$$

da resto 1 dividendo per 2, 3, 5

Assunto

□

Def si chiama spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{R}$  un insieme  $V$  dotato di due operazioni:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$$

↑  
somma di due  
"vettori" (= elementi di  $V$ )

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

↑  
prodotto, ha uno  
scalare ( $\in \mathbb{R}$ ) e vettore

con le proprietà:

1.  $\exists 0 \in V$  t.c.  $v + 0 = 0 + v = v \quad \forall v \in V$
  2.  $\forall v \in V \quad \exists (-v) \in V$  t.c.  $v + (-v) = 0$
- (V, +, 0)  
è gruppo  
comm.



$$3. \quad v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3 \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$$

$$4. \quad v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$5. \quad \lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in V$$

$$6. \quad (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v \in V$$

$$7. \quad (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) \quad \dots \quad \text{---}$$

$$8. \quad \underline{1} \cdot v = v \quad \forall v \in V$$

Example  $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} = V$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

operations in  $V = \mathbb{R}^n$

"vecchio" + in  $\mathbb{R}$

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \odot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \odot x_n \end{pmatrix}$$

move operation

vecchio modulo in  $\mathbb{R}$

Verifiez  $L_1$ ,  $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$   $\forall v_1, v_2 \in V$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$
$$v_2 + v_1 = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} \quad \Bigg] \quad \parallel$$

perdue in  $\mathbb{R}$

$$\underline{x_i} + \underline{y_i} = \underline{y_i} + \underline{x_i}$$

— somme en  $\mathbb{R}$