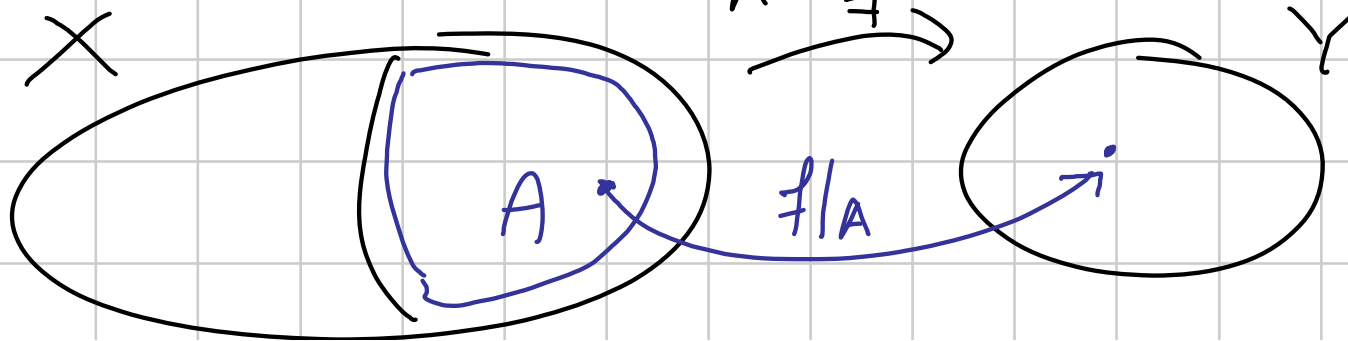


Alp Lin 28/10/15

$$f: X \rightarrow Y \quad A \subset X$$

$$f|_A: A \rightarrow Y \quad \text{restriction of } f \text{ to } A$$

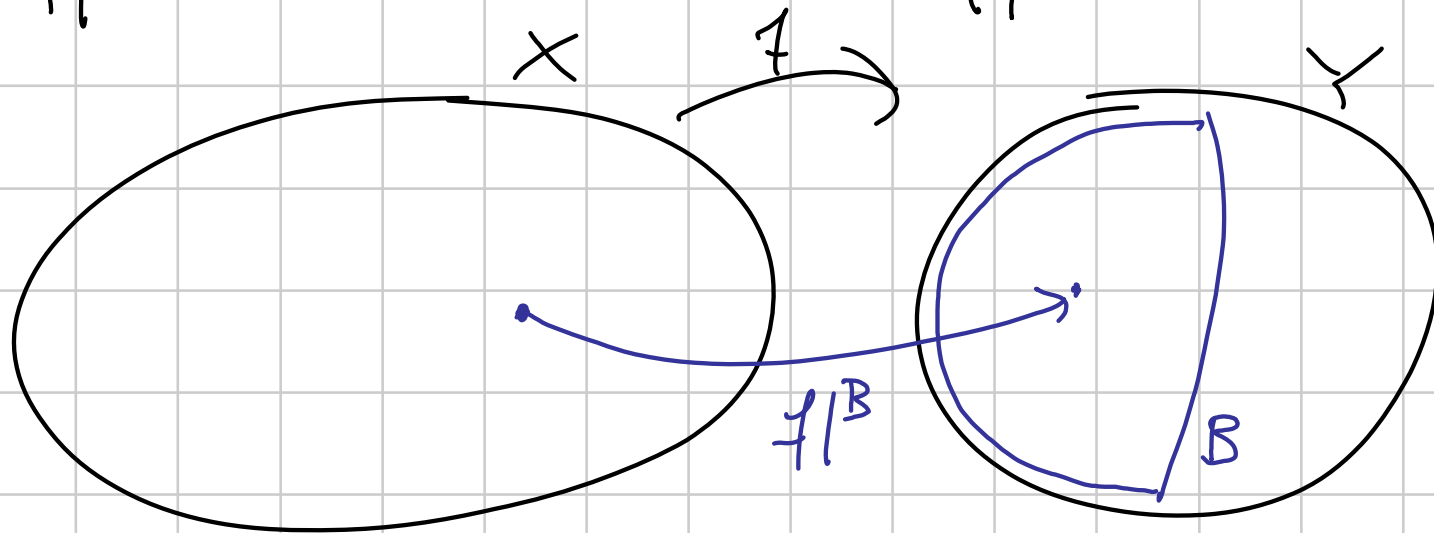
la funzione deve da $f|_A(a) = f(a) \quad \forall a \in A$



Dato $f: X \rightarrow Y$ se $f(X) \subset B$ chiamo

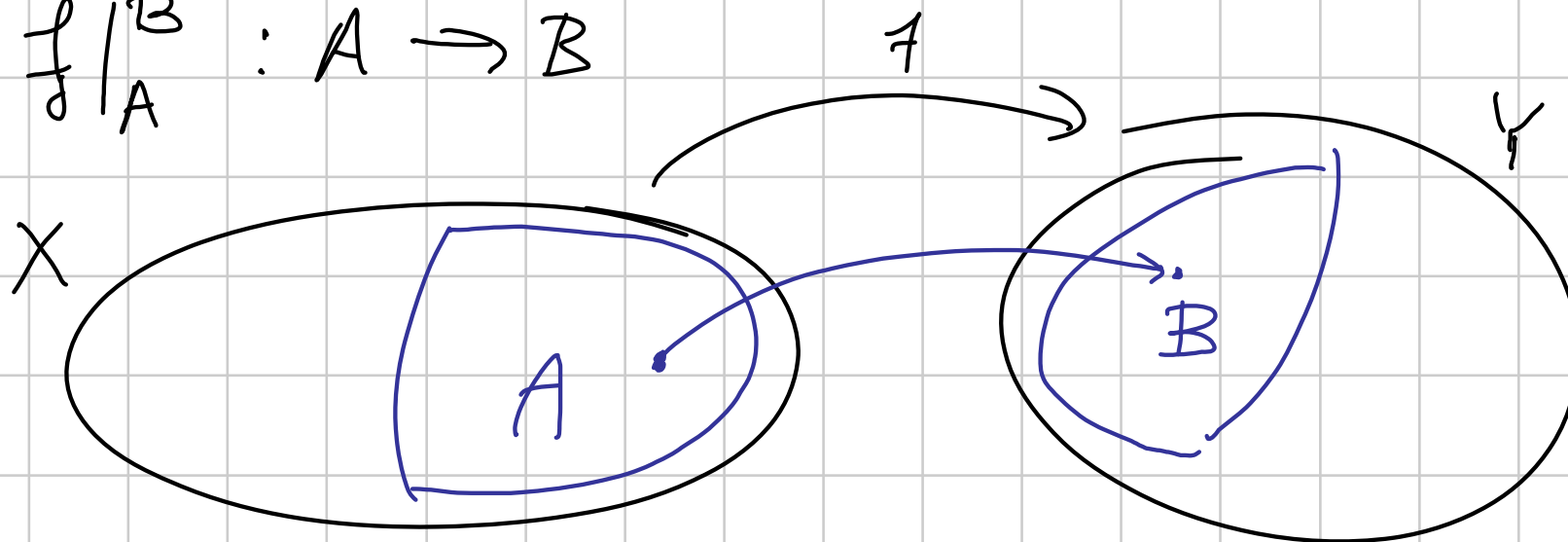
abbreviazione di f a B la

$f|_B : X \rightarrow B$ dato da $f|_B(x) = f(x) \forall x \in X$



Se $f: X \rightarrow Y$ e $f(A) \subset B$ posso prendere

$$f|_A^B : A \rightarrow B$$



Def: V, W sp. vekt. $f: V \rightarrow W$ $\bar{e}$ linear

$$\text{se } f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad v_1, v_2 \in V$$

Oss: date tale f , se $U \subset V, Z \subset W$
sono sottosp. e $f(U) \subset Z$ allora $f|_U^Z$
è lineare.

Es: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}.$$

Dico che f è lin. (verifica come al solito).

Affermo che $f(X) \subset X$. Infatti: devo

provare che preso $x \in X$, cioè t.c. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$,
 ho anche $f(x) \in X$, cioè $(f(x))_1 + (f(x))_2 + (f(x))_3 = 0$,
 ovvero

$$\begin{aligned}
 & (3x_1 - 2x_2 + x_3) + \\
 & + (5x_1 + 4x_2 - 3x_3) + \\
 & + (-6x_1 + 2x_2 + 6x_3) = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4(x_1 + x_2 + x_3) \\
 & = 0 \quad : \underline{\underline{OK}}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ induce una applicaz. $f|_X^X : X \rightarrow X$ lin.

Att: $f|_X$ ha senso sempre ed è lin.

$f|_X^Y$ ha senso solo se $f(X) \subset Y$

Fisso $f: V \rightarrow W$ lineare. Definisco:

$$\text{Im}(f) = \{f(v) : v \in V\} = \{w \in W : \exists v \in V \text{ con } f(v) = w\} \subset W$$

immagine di f

$$\text{Ker}(f) = \{v \in V : f(v) = 0\} \quad \text{nucleo di } f$$

$$\underline{\text{Es}}: f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 11x_1 - 7x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } f = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0 \right\} \quad \text{è l'insieme delle soluz di}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 11x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{è stsp. di } \mathbb{R}^3$$

$$: 2 \cdot \text{I} - \text{II}$$

$$\Rightarrow \text{Ker } f = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -31 \\ -32 \\ 13 \end{pmatrix} \right) \quad \dim(\text{Ker } f) = 1.$$

Oss: $\text{Im } f \subset W$ e $\text{Ker } f \subset V$ sono ssp.

Gufatti:

$$w_1, w_2 \in \text{Im } f, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V \text{ t.c. } f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$$

$$\begin{aligned} \text{dunque } \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 &= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \\ &= f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$v_1, v_2 \in \text{Ker } f, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(v_1) = f(v_2) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{dunque } f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Oss: $\text{Im } f = \{0\} \iff f = 0$
 $\text{Ker } f = V \iff f = 0$
 $\text{Im } f = W \stackrel{\text{DEF}}{\iff} f \text{ surattiva}$

Prop: $\text{Ker } f = \{0\} \iff f \text{ iniettiva}$

Dim: $\hookrightarrow$ ovvio:

iniettiva = "ogni pto ha al più una preimmagine"
 $\text{Ker } f = 0 = "0 \text{ ha solo } 0 \text{ come preimmagine}"$

$\Rightarrow$: prendiamo $v_1, v_2 \in V$ con $f(v_1) = f(v_2)$.

Dobbiamo provare che allora $v_1 = v_2$ - Infatti:

$$f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0$$

$$\Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \text{Ker } f$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$



Qss: È importante capire se dati V, W sp. vett.
possa esistere una $f: V \rightarrow W$ biettiva lineare -

Sappiamo: tale f esiste $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$

In tal caso V, W sono "isomorfi" come sp. vett.

Ora "biettive" = "iniettive" + "suriettive"

Prop: data $f: V \rightarrow W$ si ha

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V)$$

Formule delle dimensioni

k

n

Dim: Prendo $v_1, \dots, v_k$ base di $\text{Ker } f$.

La completo a base $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m$ di V .

Tesi: $\dim \text{Im } f = m - k$. Affermo che

$f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)$ è base di $\text{Im } f$: cioè basta.

• generano: Sia $w \in \text{Im } f$, cioè $\exists v \in V$ t.c. $f(v) = w$,

ora $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_m v_m$

$$\Rightarrow w = f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_k f(v_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_m f(v_m)$$

$$= \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_m f(v_m)$$



- lim. indep: prendiamo $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_m f(v_m) = 0$$

Devo provare che allora $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_m = 0$

$$\text{Ore } f(\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_m v_m) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_m v_m \in \text{Ker } f$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_m v_m = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

$$\Rightarrow (-\lambda_1) v_1 + \dots + (-\lambda_k) v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_m v_m = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-\lambda_1) = \dots = (-\lambda_k)}_{\text{ok me won solve}} = \underbrace{\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_m}_\checkmark = 0$$



$f: V \rightarrow W$ lin; $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim V$.

Conseguenze:

• f iniettiva $\Rightarrow \dim \text{Ker } f = 0 \Rightarrow \dim \text{Im } f = \dim V$
 $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$

$\uparrow$ poiché $\text{Im } f \subseteq W$
 $\Rightarrow \dim(\text{Im } f) \leq \dim W$

Orvvero: se $\dim V > \dim W$ non esiste $f: V \rightarrow W$
iniettiva.

- f surgettiva $\Rightarrow \text{Im } f = W \Rightarrow \dim(\text{Im } f) = \dim(W)$
 $\Rightarrow \dim(\text{Ker } f) + \dim(W) = \dim(V)$
 $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$

Ovvero: se $\dim V < \dim W$ non esiste
 $f: V \rightarrow W$ surgettiva _

Attenzione: esistono $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ biettive
 (non lineari) _

- Sapendo già che $\dim V = \dim W$
 date $f: V \rightarrow W$ si ha
 f iniettiva $\Leftrightarrow f$ surgettiva.

Infatti: $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V = \dim W$

$$\text{iniettiva} \Leftrightarrow \dim \ker f = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim W \Leftrightarrow f \text{ surg.}$$

4.2.18 Base di $\mathcal{Q}_m = \{A \in M_{m \times m} : {}^t A = -A\}$

matrici antisimmetriche

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dim &= (n-1) + \dots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Base: $E_{ij} - E_{ji} \quad i < j$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\begin{aligned} &\bullet \left\{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq d}[t] : p(1) = 0 \right\} \\ &= \left\{ a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d : a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_d = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$a_0 = -a_1 - \dots - a_d$$

$$t^{-1}, t^{2-1}, \dots, t^{d-1} \quad \text{base} \quad \dim = d$$

$$\cdot \left\{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[t] : 2p(1) + p''(-1) = p(2) - 3p'(1) = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} 2(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_2 - 6a_3 + 12a_4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 - 3(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_0 + 2a_1 + 3a_2 - 4a_3 + 14a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 - a_1 - 2a_2 - a_3 + 4a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{4} (a_2 + 6a_3 - 22a_4) \\ a_1 = \frac{1}{4} (-7a_2 + 2a_3 - 6a_4) \end{cases}$$

$$\dim = 3$$

Base:

$$1 - 7t + 4t^2$$

$$6 + 2t + 4t^3$$

$$-22 - 6t + 4t^4$$

$$\bullet \left\{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq d}[t] : p(-t) = p(t) \right\}$$

$$a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

$$= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Base : $1, t^2, t^4, \dots, t^{2k}$

dim :

d	dim	d/2
0	1	0
1	1	0.5
2	2	1
3	2	1.5

$$[d/2] + 1$$

$$\begin{array}{c|c|c} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2.5 \\ 6 & 4 & 3 \end{array}$$

$$\bullet \{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq d}(t) : p(-t) = -p(t) \}$$

$$\text{Basis } t, t^3, t^5, \dots, t^{2k+1}$$

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d_n	0	1	1	2	2	3	3	4	4

$$d_n = \left\lceil \frac{d+1}{2} \right\rceil$$

• $\mathcal{B}(\{a, b, c\}, \mathbb{R}) = V$ Sappiamo $V \leftrightarrow \mathbb{R}^3$
 $f \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(c) \end{pmatrix}$

Tramite queste corrisp. la base canonica di $\mathbb{R}^3$
 dà la base di V :

$$f_1: \begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 0 \end{cases}$$

$$f_2: \begin{cases} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 0 \end{cases}$$

$$f_3: \begin{cases} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 1 \end{cases}$$

- $\{f \in \mathcal{F}(\{a, b, c\}, \mathbb{R}) : 3f(a) - 2f(b) + 5f(c) = 0\} = W$

Traslate $V \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ di sopra

$$W \leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$$

$$\dim = 2$$

base :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Corrisp. base di W :

$$g_1: \begin{cases} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 5 \\ c \mapsto 2 \end{cases}$$

$$g_2: \begin{cases} a \mapsto 2 \\ b \mapsto 3 \\ c \mapsto 0 \end{cases}$$