

Alg. Lin

28/10/2015

Teo (Grassmann)

V sp. vett., W, Z ssp di V

$$\dim_{\mathbb{R}}(W) + \dim_{\mathbb{R}}(Z) = \dim_{\mathbb{R}}(W \cap Z) + \dim_{\mathbb{R}}(W + Z)$$

Def

se V, W sono sp. vett., una funzione

$f: V \rightarrow W$ si dice **lineare** se

rispetta le operazioni di sp. vett. e cioè

$$f(\underset{\substack{\uparrow \\ V}}{0}) = \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{0}, \quad f(\underset{\substack{\uparrow \\ V}}{v_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ V}}{v_2}) = \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{f(v_1)} + \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{f(v_2)}, \quad f(\underset{\substack{\uparrow \\ V}}{\lambda \cdot v}) = \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{\lambda \cdot f(v)}$$

ES

Se B è base di V

$$B = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \longmapsto [v]_B$$

è lineare (già visto)

ES

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 - 9x_2 \end{pmatrix}$$

è lineare?

$$f(0) \stackrel{?}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f(x+y) = f\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3(x_1+y_1) + 5(x_2+y_2) \\ -(x_1+y_1) + 4(x_2+y_2) \\ 7(x_1+y_1) - 9(x_2+y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 - 9x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_1 + 5y_2 \\ -y_1 + 4y_2 \\ 7y_1 - 9y_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

✔
sostituendo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

& faccio una verifica analoga
✔

Tale f se bene prende.

le componenti dell'immagine sono funzioni

"buone" (cioè polinomiali omogenee di grado 1)

nelle componenti di x —

Fatto : vanno bene esattamente le funzioni dette così
(o mescolate)

es $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \log(e^{7x_1 - \pi \cdot x_2})$$

è lineare

$$\hookrightarrow f(x) = 7x_1 - \pi \cdot x_2$$

es $V = C^0([0,1]; \mathbb{R})$ = funzioni continue su $[0,1]$
(è sottospazio di $\mathcal{F}([0,1]; \mathbb{R})$)

$$C^0([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_0^1 x(t) dt \quad \text{è lineare}$$

ES $D: \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$$D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n t^{n-1} \quad \text{è lineare}$$

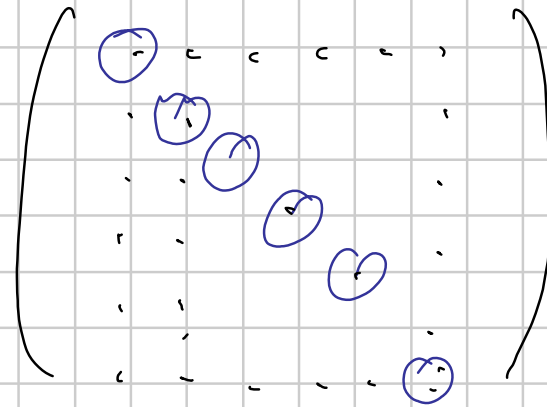
ES $A_n: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

tracce

$$A \longmapsto \sum_{i=1}^n (A)_{ii}$$

matrici quadrate
 $n \times n$

traccia =
 somma dei coeff.
 sulla diag. principale

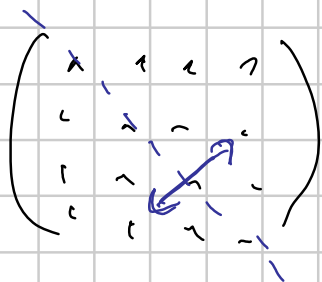


ES Trasposizione $M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times m}(\mathbb{R})$ è lineare
 $A \mapsto {}^t A$

$({}^t A)_{ij} := (A)_{ji}$
 cioè scambio righe e colonne
 matrice trasposta di A

$${}^t \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ -2 & 4 \\ 5 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

Nel caso $m = n$ (matrici quadrate) sto facendo
le rifl. risp. alla diagonale principale -



$${}^t \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & \pi \\ 9 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & \pi & 7 \end{pmatrix}$$

OSS la trasf. è lineare

$${}^t (\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2) = \lambda_1 \cdot {}^t A_1 + \lambda_2 \cdot {}^t A_2$$

$$\underline{\text{ES}} \quad f: \mathcal{F}(\{a, b, c\}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\alpha \longmapsto f(\alpha) = \begin{pmatrix} 3\alpha(a) - 7\alpha(b) \\ 5\alpha(b) - 9\alpha(c) \end{pmatrix}$$

è lineare:

$$f(\alpha + \beta) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3(\alpha + \beta)(a) - 7(\alpha + \beta)(b) \\ 5(\alpha + \beta)(b) - 9(\alpha + \beta)(c) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{3(\alpha(a) + \beta(a))} - \underline{7(\alpha(b) + \beta(b))} \\ \underline{5(\alpha(b) + \beta(b))} - \underline{9(\alpha(c) + \beta(c))} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(a) &= \alpha(a) + \beta(a) \\ \underline{\quad (b) \quad} &= \underline{\quad (b) \quad} + \underline{\quad (b) \quad} \\ \underline{\quad (c) \quad} &= \underline{\quad (c) \quad} + \underline{\quad (c) \quad} \end{aligned}$$

← stesso risultato

$$J(\alpha) + J(\beta) = \left(\frac{3\alpha(a) - 7\alpha(b)}{5\alpha(b) - 9\alpha(c)} \right) + \left(\frac{3\beta(a) - 7\beta(b)}{5\beta(b) - 9\beta(c)} \right) \leftarrow$$

ES $J: \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \rightarrow J(\{a, b\}, \mathbb{R})$

$$J(K_0 + K_1 t + K_2 t^2) = \begin{cases} a \mapsto K_0 + 9K_2 \\ b \mapsto 5K_0 + K_1 - 3K_2 \end{cases}$$

E' lineare

$$\bullet \quad J(\lambda \cdot P(x)) \stackrel{?}{=} \lambda \cdot J(P(x))$$

$$J(P_1(x) + P_2(x)) \stackrel{?}{=} J(P_1(x)) + J(P_2(x))$$

cioè vediamo se a dx e dx c'è la stessa funzione $\{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\therefore \rightarrow f(\lambda(K_0 + K_1 t + K_2 t^2)) = f(\lambda K_0 + \lambda K_1 t + \lambda K_2 t^2) =$$

$$= \begin{cases} a \mapsto \lambda K_0 + 9 \lambda K_2 \\ b \mapsto 5 \lambda K_0 + \lambda K_1 - 3 \lambda K_2 \end{cases} \quad \leftarrow =$$

$$\lambda f(K_0 + K_1 t + K_2 t^2) = \begin{cases} a \mapsto \lambda(K_0 + 9 K_2) \\ b \mapsto \lambda(5 K_0 + K_1 - 3 K_2) \end{cases}$$

OK

Sono lineari le funzioni dei vettori colonna / polinomi /
 funzioni / matrici in spazi dello stesso tipo in cui
 le **componenti** / coeff del polin / valori delle funz / entrate della matrice
 del valore delle funz. in un punto sono funz **polinomiali**

omogenee di grado 1 nelle componenti / coeff / ... del punto -

(oppure funzioni di questo tipo mascherate)

ES $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \log(e^{5x_1} - 7x_2) \\ 7x_1 + \sqrt{3}x_2 \end{pmatrix}$

ES $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_4 + \underbrace{(x_1 + x_3)}^{512} \\ 6x_1 - 3x_2 + \sin(\underbrace{x_1 + x_2 - x_4}) \end{pmatrix}$$

NON È LINEARE

$$\text{es. } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{Se } W = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

e definiamo $g: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $g(x) = f(x)$

(dico che g è la restrizione di f a W)

$$\text{Nota che } \begin{array}{l} \frac{1}{6}(\text{I} + \text{II}) \\ -\frac{1}{3}(2\text{I} - \text{II}) \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{su } W \quad f(x) = h(x) \quad h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_3 \\ 6x_1 - x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} h \text{ è lineare} \\ \Rightarrow \text{anche } g \text{ è lineare.} \end{array}$$

