

Alg Lin 25/11/2015

Sottospazi affini

Leppiamo risolvere $A \cdot x = 0$

ma $A \cdot x = b$?

Def Sia V uno sp. vett. Un sottoinsieme E di V si dice sottospazio affine se esiste $v \in V$ e $W \subset V$, W sottosp. vettoriale $A.C.$

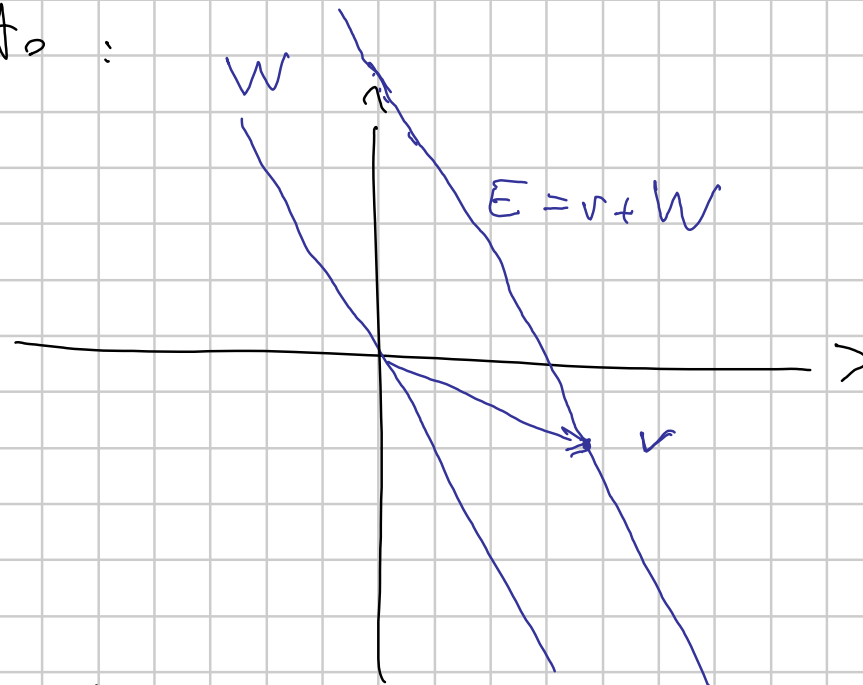
$$E = \{ v + w : w \in W \}$$

e scriviamo $E = v + W$

→ somma tra vettore e un insieme di vettori

$$(Z + Y = \{z + y : z \in Z, y \in Y\} \text{ notazione coerente})$$

Significato:

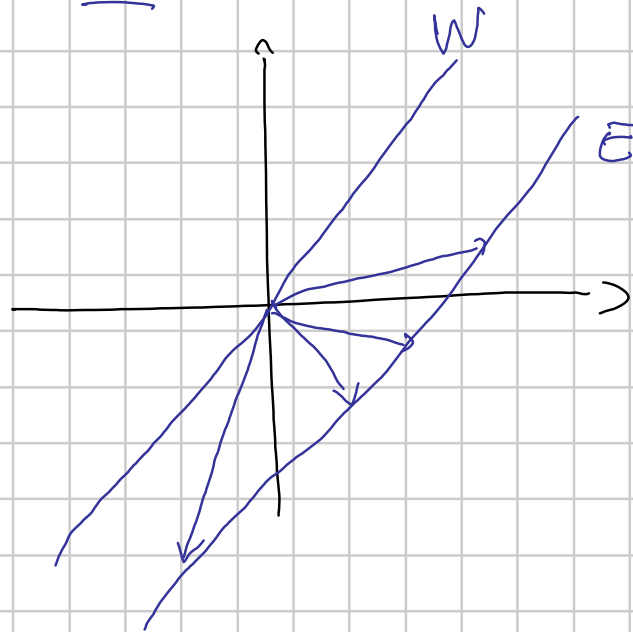


cioè $\vec{E}$ è ottenuto dal ssp W per traslazione di vettore v
 (dunque W è parallelo a $\vec{E}$, e in particolare $\vec{E}$

è l'unico sottospazio affine parallelo a W e passante per v)

Q: E determina W ? E determina v ?

si



no: se base generica
 $v \in E$

Prop (a) Se $v + W = v' + W'$ allora $W' = W$

(b) Se $v + W = v' + W'$ allora $v' \in v + W$

Dim (a) proviamo che $W \subset W'$ (viceversa è analogo)

$$v = v + 0 \in v + W \Rightarrow v \in v' + W' \Rightarrow$$

$$\underline{v = v' + w'_0} \quad w'_0 \in W'$$

Prendo $\underline{w \in W}$ e mostro $w \in W'$

$$v + w \in v + W \Rightarrow v + w \in v' + W' \Rightarrow$$

$$v + w = v' + w'_0 = (v - w'_0) + w'_0$$

$$\underline{w} = w'_0 - w'_0 \in \underline{W'}$$

$$(b) \quad v + W = v' + W \quad \Leftrightarrow \quad v' \in v + W$$

$$v' = v' + 0 \in v' + W = v + W \quad \Rightarrow \quad v' \in v + W$$

$$v + W = v' + W \quad \Leftarrow \quad v' \in v + W$$

$v' \in v + W$ lo posso scrivere come $v' = v + w_0, w_0 \in W$

$$\text{allora } v' + W = v + \underbrace{w_0 + W}_{= W}$$

Def Se $E = v + W$ chiamo W le giaciture di E . ^②

$$\text{poniamo } \dim(E) = \dim(W)$$

Chiamo presentazione parametrica di E ssp. aff. di $\mathbb{R}^n$
la scrittura:

$$\bar{E} = v_0 + \text{Span}(w_1, \dots, w_k) =$$

$$= \{ \underline{1}v_0 + t_1 w_1 + \dots + t_k w_k : \underbrace{t_1, \dots, t_k}_{\substack{\text{i } k \text{ parametri della} \\ \text{presentazione parametrica}}} \in \mathbb{R} \}$$

OSS

ogni $\bar{E}$ ssp aff con $\dim(\bar{E}) = d$

ammette una presentazione parametrica con d
parametri (o più di d)

Se $\bar{E} = v_0 + W$ basta prendere una base $w_1, \dots, w_d$ di W

Ripetendo alcuni dei w_j ottengo più parametri.

ES rette in $\mathbb{R}^2$ $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ma anche

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 999 \\ 999 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(parametri sovrabbondanti)

ES rette in $\mathbb{R}^3$ $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ con $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ES piano in $\mathbb{R}^3$ $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$

con $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ lin. indip. cioè $\text{rank} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 2$

cioè uno dei det. delle matrici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \text{ è } \neq 0$$

OSS Visto che l'insieme delle sol. di $A \cdot x = b$

se non è $\emptyset$ è del tipo $x_0 + \text{Ker}(A)$

con x_0 sol. particolare. Dunque

$\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\}$ è un ssp. affine di $\mathbb{R}^n$

$$\dim = \dim(\ker A) = n - \dim(\operatorname{Im}(A)) = n - \operatorname{rank}(A)$$

cio' eccola re

$$\operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rang}(A, b)$$

Def Chiamo presentazione canonica di un ssp affine

$E \subset \mathbb{R}^n$ la scrittura

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\}$$

(abbreviato)

$$\Leftrightarrow : A \cdot x = b$$

matrice $m \times n$ che
giusta def. affl. line
 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Prop ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ ssp aff di dim. d ha
una pres. cartesiana con $n-d$ equazioni (ma anche
con un qualsiasi numero $\geq n-d$ di equazioni) —

Oss la pres. cartesiana ha senso solo per $E \subset \mathbb{R}^n$
(ma non per $E \subset V$)

ES retta in $\mathbb{R}^2$ $\dim = 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1$ eques.

$$E : \alpha x + \beta y = \gamma \quad \text{con } (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

ES retta in $\mathbb{R}^3$ $\dim = 1 \Rightarrow 3 - 1 = 2$ eques.

$$E : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \end{cases}$$

con $\text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 2$ cioè una delle

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \quad \text{ha } \det \neq 0.$$

ES piano in $\mathbb{R}^3$ $\dim = 2 \Rightarrow 3 - 2 = 1$ equaz

$$E : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

$$\text{con } (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$$

Dim (Prop.) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ ssp aff.

$$E = v_0 + W \quad \dim W = d$$

Cerco $A \in M_{\underbrace{(n-d) \times n}}(\mathbb{R}) \quad A \subset \text{Ker } A = W$

definisce $n-d$ eques. in n incognite

Le trovo tale A basta prendere $\underline{b = A \cdot v_0}$ e

si ha $E : A \cdot x = b$

Scelgo $w_1, \dots, w_d$ base di W e la completa e

$w_1, \dots, w_d, v_{d+1}, \dots, v_n$ base di $\mathbb{R}^n$ —

Definisco $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ lineare, l'unica con

$$f(w_j) = 0 \quad j = 1, \dots, d$$

$$f(v_i) = e_{i-d} \quad i = d+1, \dots, n$$

e_{i-d} — vettori d. base standard di $\mathbb{R}^{n-d}$

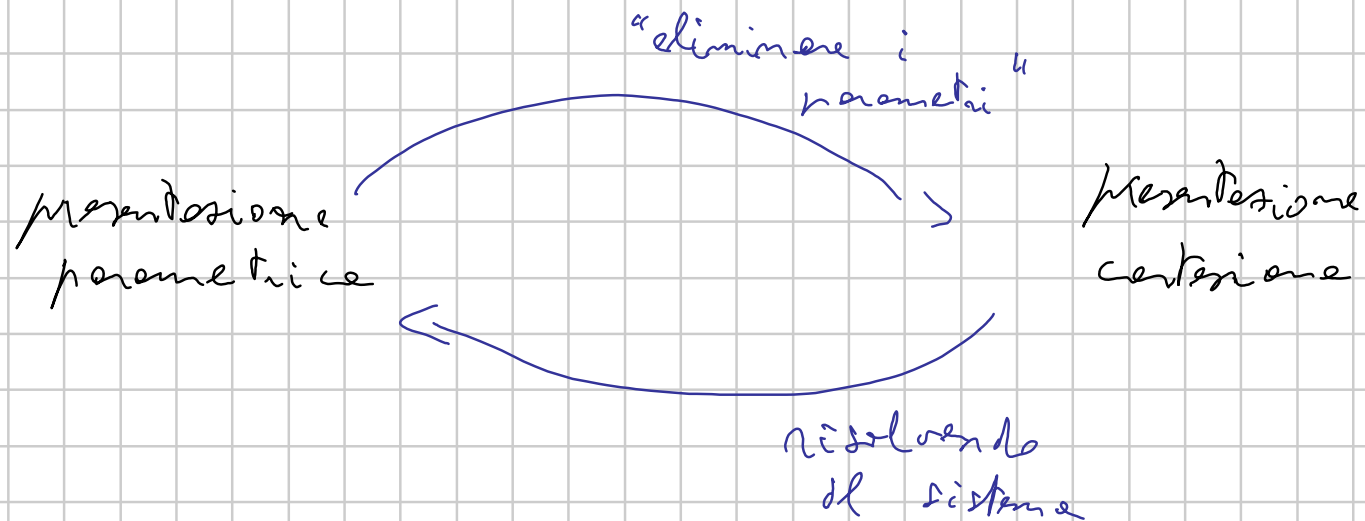
Chiaro che $W \subset \text{Ker } f$ — Inoltre $\text{Ker } f = W$ —

In effetti $\dim(\text{Im } f) = n-d \Rightarrow \dim \text{Ker } f = n - (n-d) = d =$

Ora basta mostrare $A = [f]_{\substack{\mathbb{R}^{(n-d)} \\ \mathbb{R}^n}} = \dim W$

□

Si possono eseguire dunque i passaggi



Vediamo i passaggi per rette in $\mathbb{R}^2$, rette e piani in $\mathbb{R}^3$:

Rette in $\mathbb{R}^2$

$$E = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$E: \alpha x + \beta y = \gamma$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} \text{E} &: \quad b x - 2 y = \overbrace{b x_0 - 2 y_0}^{A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}} \\ &\quad \quad \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con } \text{Ker } A = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad \begin{pmatrix} b \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\leftarrow \quad \text{E} = \frac{\gamma}{2^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \right)$$

$\text{Ker} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \alpha x + \beta y$

ES

$$\text{E} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \text{E} = 8x + 9y = 101 -$$

ES

$$\text{E} \quad 7x - 4y = 13 \quad \Rightarrow \quad \text{E} = \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{mi basta} \\ \text{un'equazione} \\ \uparrow \in \text{E}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} 7 \cdot 1 - 4 \cdot 0 &= 7 \\ 7 \cdot \boxed{\frac{13}{7}} - 4 \cdot \boxed{0} &= 13 \end{aligned}$$

ES retta in $\mathbb{R}^3$

$$E = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

con $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} bx - ay = bx_0 - ay_0 \\ cx - az = cx_0 - az_0 \\ cy - bz = cy_0 - bz_0 \end{cases}$$

Sommando 3 equazioni me sono 2 perche $\text{rank} \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ c & 0 & -a \\ 0 & c & -b \end{pmatrix}$

è 2 e in altre ende

$$E : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = d_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = d_2 \end{cases}$$

con $\text{rank}(\dots) = 2$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} b & -a & 0 & x_0 - az_0 \\ c & 0 & -a & cx_0 - az_0 \\ 0 & c & -b & cz_0 - bz_0 \end{pmatrix} = 2$$

($\Rightarrow$ posso buttare via una delle tre equazioni)

Infatti:

$$\begin{pmatrix} b & \boxed{-a} & \boxed{0} \\ c & \boxed{0} & \boxed{-a} \\ 0 & c & -b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ \boxed{c} & \boxed{0} & -a \\ \boxed{0} & c & -b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{b} & -a & \boxed{0} \\ c & 0 & -a \\ \boxed{0} & c & \boxed{-b} \end{pmatrix}$$

$\downarrow \det$ $\downarrow \det$ $\downarrow$
 a^2 c^2 $-b^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{uno dei tre è } \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rank} \geq 2$$

Inoltre

$$\det \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ c & 0 & -a \\ 0 & c & -b \end{pmatrix} = b \cdot a c + a (-cb) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} b & -a & bx_0 - ay_0 \\ c & 0 & cx_0 - az_0 \\ 0 & c & cy_0 - bz_0 \end{pmatrix} = a \cdot c (cy_0 - bz_0) +$$
$$- c (b (cx_0 - az_0) - c (bx_0 - ay_0))$$
$$= 0$$

e analog. i det degli altri minori 3×3

contenuti la colonna

$$\begin{pmatrix} bx_0 - ay_0 \\ cx_0 - az_0 \\ cy_0 - bz_0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{E} \quad E = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E : \begin{cases} 3x + 4y = 41 \\ 3y + 4z = 49 \end{cases}$$

$$\leftarrow \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \end{cases}$$

* cerca una soluz particolare $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ (ora lo faccio)

* cerca un generatore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ delle soluz del sistema omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \end{cases}$$

Osservo che

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \\ -\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1 \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \end{pmatrix}$$

forma l'insieme delle soluz.

cioè è soluz ed è $\neq 0$

perché.

svil. risp 1^a riga

$$\alpha_1 \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} + \beta_1 \left(-\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \right) + \gamma_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha_2 \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1,1 \end{pmatrix}} + \beta_2 \underbrace{\left(-\det \begin{pmatrix} 1,1 \end{pmatrix} \right)} + \gamma_2 \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1,1 \end{pmatrix}}_{\text{substitui } I^e \text{ rige}} = 0 \quad \checkmark$$

perché soluz. $\neq 0$?

$$\text{perché rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 2$$

ES

$$\begin{cases} 7x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\text{soluz. generale } \text{da} \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-6) - 4 \cdot 3 \\ +7(-6) - 3 \cdot 5 \\ 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -57 \\ 38 \end{pmatrix}$$

Piano in $\mathbb{R}^3$

$$E = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right)$$

Con $\text{rank} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 2$

$$E: \alpha x + \beta y + \gamma z = d$$

→ cerco un'espr. $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

di cui siano soluz. $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

(poi basta $d = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0$)

$$\det \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{a_1} & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0 = \det \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{a_2} & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} a_1 + \left(-\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \right) \cdot b_1 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} c_1 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} a_2 + \left(-\det \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \right) \cdot b_2 + \det \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} c_2 = 0$$

$\Rightarrow$ 1^{te} eq. cancela x

$$(b_1 c_2 - c_1 b_2) x - (a_1 c_2 - a_2 c_1) y + (a_1 b_2 - a_2 b_1) z = 0$$

