

Alg Lin. 24/11/2015

$$\cdot \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

• lo calcoliamo con gli sviluppi di Laplace, "mettendo" degli zeri nella matrice per ottenere una riga/columna con tanti zeri -

• $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ è invertibile -

Teo (Binet) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

D11 difficile usando la formula con $\mathbb{C}_n$ -

D117 (indiretta, uso Teo " $\exists!$ funzione $M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l.c.

- 1) lineare nelle colonne, 2) scambiando 2 col. cambia segno
3) vale 1 su I_n)

Lo già che $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ è invertibile -

Se $\det(A) = 0$ $\Rightarrow A$ non è invertibile

$\Rightarrow A \cdot B$ non è invertibile $\Rightarrow \det(A \cdot B) = 0$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

"
0

"
0

Se $\det(A) \neq 0$ considero questa funzione

$$f: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$M \longmapsto \det(A \cdot M) / \det(A)$$

Si verifica che f soddisfa le proprietà:

1. Lineare in ciascuna colonna
2. Cambia segno scambiando due colonne
3. Vale 1 su I_n

$$I_n \longmapsto \det(A \cdot I_n) / \det(A) = \det(A) / \det(A) = 1$$

Per il Teorema (*) si ha

$$\frac{\det(A \cdot M)}{\det(A)} = \det(M) \quad \forall M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot M) = \det(A) \cdot \det(M) \quad \square$$

Prop Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$ si ha

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}$$

matrice ottenuta
da A togliendo
riga j e
colonna i

$$\underline{\text{ES}} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

$$\det(A) = ad - bc$$

$$\text{Se } \det(A) \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Verifico che è effettivamente l'inversa

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & db - ab \stackrel{=0}{=} \\ -ca + ac \stackrel{=0}{=} & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ES

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 15 & -11 \\ 0 & 23 & -7 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (-1) (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 15 & -11 \\ 23 & -7 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ 23 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= 105 - 319 = -214$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$I_2 + 2 III_2$

$II_2 + 4 III_2$

cerco di
mettere 0
nella 1° col.

$$A^{-1} = \frac{1}{-214} \begin{pmatrix} \boxed{-16} & 0 \\ 29 & \boxed{-30} \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{2+3}$
 $\det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{1+3}$

Dim poniamo $b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}$ $B = (b_{ij})$

e verifico che $B = A^{-1}$ cioè

$$A \cdot B = I_n$$

$$B \cdot A = I_n$$

(basterebbe una sola delle due: implica l'altra)

$$\begin{aligned}
 (A \cdot B)_{kj} &= \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \cdot (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)} \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \underbrace{\sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} a_{ki} \det(A^{ji})}
 \end{aligned}$$

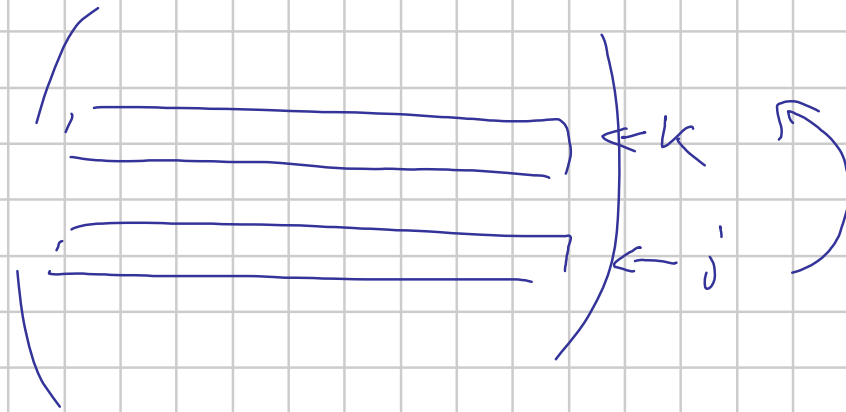
sviluppo lungo la riga j -esima del det.
di una matrice ottenuta da A

sostituendo la j -esima riga con la k -esima.

se $k = j$ viene $\det(A)$

se $k \neq j$ è il det di una matrice con
due righe uguali (j e k)

$A =$
con righe
e col. di j



ricopio la riga
j al posto della k

$$(A \cdot B)_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

cioè $(A \cdot B) = I_n$

$$(B \cdot A)_{i-k} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot a_{jk} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)} \cdot a_{jk} =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a_{jk} \det(A^{ji})$$

sviluppo lungo colonna i -esima del
 $\det$ di una matrice ottenuta da A
 sostituendo la colonna i -esima con la colonna
 k -esima : se $k=i$ viene $\det(A)$

se $k \neq i$ viene 0 (due col. uguali)

$$= \delta_{ik} \Rightarrow B \cdot A = I_n$$

Formule di Cramer: se

$$\boxed{A \cdot x = b} \quad \text{è un sistema quadrato}$$

$(A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}^n)$

se $\det(A) \neq 0$ (cioè ha unica soluzione)
allora la soluzione x si trova con:

$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}}$$

dove A_i è ottenuta da A sostituendo la colonna
 i -esima con b .

$$\underline{ES} \quad \begin{cases} 3x - 5y + 7z = 12 \\ 4x + 2y - 9z = 6 \\ -x + 8y + 11z = -7 \end{cases}$$

$$x = \det \begin{pmatrix} 12 & -5 & 7 \\ 6 & 2 & -9 \\ -7 & 8 & 11 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -9 \\ -1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$y = \det \begin{pmatrix} 3 & 12 & 7 \\ 4 & 6 & -9 \\ -1 & -7 & 11 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -9 \\ -1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$z = \det \begin{pmatrix} 3 & 12 & 7 \\ 4 & 6 & -9 \\ -1 & -7 & 11 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -9 \\ -1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Dim (delle formule di Cramer)

$$A \cdot x = b$$

$$x = A^{-1} \cdot b$$

$$x_i = (A^{-1} \cdot b)_i =$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)} \cdot b_j =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_j \cdot \det(A^{ji})}{\det(A)}$$

lungo le colonne i'
✓
sviluppo delle matrici
ottenute da A sostituendo
le colonne i con b
 $\Rightarrow$ viene $\det(A_i)$ 

Ricordiamo $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\text{rank}(A) &= \dim(\text{Im}(A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)) = \\ &= \dim \text{ di spz. di } \mathbb{R}^m \text{ generato dalle colonne di } A - \\ &= \text{max num. di col. di } A \text{ che costituiscono} \\ &\quad \text{un sist. lin. indep. di vettori} -\end{aligned}$$

Cor $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\text{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$$

Def diciamo che B è sottomatrice di A se si ottiene da A cancellando alcune righe e/o alcune colonne -

Diciamo che B' è un orlo di B se B si
 ottiene da B' cancellando esattamente una riga e
 una colonna

ES

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 3 & \sqrt{7} \\ \hline -2 & 4 & 8 \\ 5 & -7 & 13 \end{array} \right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 13 \end{pmatrix} \text{ è } \text{sovrastato.}$$

Le orlate di B sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{7} \\ -2 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{7} \\ 4 & 8 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$$

perché esiste

$$A = \left(\begin{array}{c} \text{Diagram showing a rectangle } B \text{ inside a larger rectangle } B' \end{array} \right)$$

oss Se $B \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ ogni B esiste e
 $M_{(k+1) \times (k+1)}(\mathbb{R})$

Teo Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, sia $r \in \mathbb{N}$ t.c.

• esiste una sottomatrice B $r \times r$ di A con $\det(B) \neq 0$

• ogni sottomatrice B' di B ha $\det(B') = 0$ -

$\Rightarrow$ Allora $\text{rank}(A) = r$

Conseguenze : algoritmo per calcolare il rango di A

(Teo : $r=0$?) Autt: i coeff di A sono nulli?

si
 $\swarrow$
 $\text{rank}(A) = 0$

no
 $\searrow$
Esisto un certo coeff $\neq 0$,
sottomatrice 1×1 $B_{(i)}$, cioè una

ora: (Teo: $n=1$?) cioè le sulte
di $B^{(1)}$ hanno tutte $\det = 0$?

si
↙

$$\text{rank}(A) = 1$$

no
↓

Fisso $B^{(2)}$ sulte di $B^{(1)}$
con $\det(B^{(2)}) \neq 0$ -

ora (Teo: $n=2$?): le sulte di $B^{(2)}$
hanno tutte $\det = 0$?

si
↙

no
↓

$$\text{rank}(A) = 2$$

Fisso $B^{(3)}$ ordine di $B^{(4)}$
con $\det(B^{(3)}) \neq 0$

Punto importante: al j -esimo passo
devo calcolare il det. di tutte le ordine di
una sola sottomatrice fissata $j \times j$, non di tutte le
possibili sottomatrici $(j+1) \times (j+1)$ -

ES $A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{1} & \cdot & \cdot & \boxed{1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\leftarrow$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$ $B^{(2)}, \det(B^{(2)}) \neq 0$

Seguendo l'algor. calcolo il det di tutte le
matr. 3×3 di $B^{(2)}$ che sono $3 \cdot 2 = 6$

Quante sono tutte le possibili matrici 3×3 di A ?

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{3} = 4 \cdot 10 = 40$$

$\nearrow$ scelte di 3 righe tra le 4 possibili

$\uparrow$
scelte di 3 colonne tra le 5 possibili

$$\binom{q}{b} = \frac{q!}{b! \cdot (q-b)!}$$

Diamo (det Teo)

Seppiamo $\exists$ sottomatrici 2×2 B con $\det(B) \neq 0$

e tutte le sue sottomatrici hanno $\det = 0$.

Oss il rango di A non cambia se:

- permuta le colonne (ovvio);
- permuta le righe (sto applicando una mappa $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare, invertibile che riordina le coordinate) -

Posso supporre di essere in questa situazione:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & \dots \\ \hline \dots & \dots \end{array} \right)$$

Introduco questa notazione $B = (v_1, \dots, v_n)$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} v_1 & \dots & v_n & w_{n+1} & \dots & w_n \\ \hline a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & \dots & a_{n+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & a_{m,n+1} & \dots & a_{m,n} \end{array} \right)$$

So che $v_1, \dots, v_n$ è base di $\mathbb{R}^n \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ lin. ind.

$\Rightarrow$ le prime 2 col di A sono lin indep. -

so che

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & \dots & v_r & w_j \\ \hline a_{k,1} & \dots & a_{k,r} & a_{k,j} \end{array} \right) = 0$$

$$\forall j > 2, \forall k > r$$

= l'orbita ottenuta da B
aggiungendo riga k , col. j -

Poiché $v_1, \dots, v_r$ è base di $\mathbb{R}^r \Rightarrow$ esistono unici
coeff. $\alpha_1^j, \dots, \alpha_r^j$ t.c.

$$w_0 = \alpha_1^j v_1 + \dots + \alpha_2^j v_2$$

Per il $\det(\dots) = 0$ ho che le mat. non
 le colonne lin. indip., ma le prime 2 e 2' -

$\Rightarrow$ l'ultima col. $\bar{x}$ combin. lineare delle prime.

$$\exists \beta_1^{k,j}, \dots, \beta_2^{k,j} \quad r_c$$

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ \alpha_{k,j} \end{pmatrix} = \beta_1^{k,j} \begin{pmatrix} v_1 \\ \alpha_{k,1} \end{pmatrix} + \dots + \beta_2^{k,j} \begin{pmatrix} v_2 \\ \alpha_{k,2} \end{pmatrix}$$

Ma per le prime r coord. ha l'espress unica $\Rightarrow$

$$\beta_i^{K,j} = \alpha_i^j, \text{ cioè } \beta_i^{K,j} \text{ non dipendono da } K.$$

Allora $\alpha_{K,j} = \alpha_1^j \begin{pmatrix} v_1 \\ a_{K,1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r^j \begin{pmatrix} v_r \\ a_{K,r} \end{pmatrix} \quad \forall K \geq r$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_j \\ a_{r+1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} = \alpha_1^j \begin{pmatrix} v_1 \\ a_{r+1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r^j \begin{pmatrix} v_r \\ a_{r+1,r} \\ \vdots \\ a_{m,r} \end{pmatrix}$$

j -esima
colonna

combin. lin. delle prime r colonne
di A

$\Rightarrow \text{rank}(A) \leq n$, me (visto prima)

$\text{rank}(A) \geq n \Rightarrow \text{rank}(A) = n$

□