Alg Lin 21/10/2015

Def V sp. vett. , $(v_1, \dots, v_n)$ è base se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip. e generano V.

Teo due basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

Def $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ = numero di elementi di una qualsiasi base.

Prop due spazi vettoriali con la stessa dimensione sono "uguali" come spazi vett.

Il Teo. segue da :

<u>Prop</u> $P(h)$ comunque dati $w_1, \dots, w_h$ lin indip. e $K \geq 0$ e vettori $v_1, \dots, v_K$ t.c. $w_1, \dots, w_h \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_K)$ si ha che $h \leq K$.

<u>Dim</u> (per induzione) Passo base: $h = 0$; $K \geq 0$ ok

dimostriamo a mano anche $P(1)$ - non necessario

$P(1)$: prendo w_1 lin. indip. cioè $w_1 \neq 0$.

Inoltre $K \geq 0$, $v_1, \dots, v_K$ t.c. $w_1 \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_K)$.

Devo provare $\boxed{K \geq 1}$. Se fosse $K = 0$ avremmo

$w_1 \in \mathrm{Span}(\emptyset) = \{0\}$, ma $w_1 \neq 0$, quindi $K = 0$ è impossibile.

Dimostro $P(h) \Rightarrow P(h+1)$

Prendo $x_0, \dots, x_h$ ($h+1$ vettori lin. indip.), $y_1, \dots, y_n$

Ac $x_0, \dots, x_h \in \mathrm{Span}(y_1, \dots, y_n)$. Devo provare $n \geq h+1$

(usando $P(h)$).

So che $x_j \in \mathrm{Span}(y_1, \dots, y_n) \Rightarrow$ posso scrivere

$$x_j = a_{j1} y_1 + \dots + a_{jn} y_n \qquad a_{ji} \in \mathbb{R}$$

So che tutti gli x_j sono $\neq 0$. In particolare $x_0 \neq 0$.

Qualche coeff. tra $a_{01}, \dots, a_{0n}$ è $\neq 0$.

Siccome l'ordine degli y_i non conta posso supporre che $a_{01} \neq 0$. Pongo:

$$w_j := x_j - \frac{a_{j1}}{a_{01}} x_0 \qquad (j = 1, \dots, h)$$

$*$

<u>ES</u> $w_1 = x_1 - \frac{a_{11}}{a_{01}} x_0 =$

$$= \left(a_{11} \underline{\underline{y_1}} + a_{12} y_2 + \dots \right) - \frac{a_{11}}{a_{01}} \left(a_{01} \underline{\underline{y_1}} + a_{02} y_2 + \dots \right)$$

coeff di y_1 si cancellano

•) $w_1, \dots, w_h$ sono lin. indip.

••) $w_1, \dots, w_h \in \text{Span}(y_2, \dots, y_n)$

Dando per buono •), ••) $P(h)$ dice $h \leq n-1$ –

Cioè $h+1 \leq n$ che è quanto volevo dimostrare –

Dimostro •) Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{R}$ tc

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_h w_h = 0$$ cioè

$$\lambda_1 (x_1 - *_1 \, x_0) + \lambda_2 (x_2 - *_2 \, x_0) + \dots + \lambda_h (x_h - *_h \, x_0) = 0 \implies$$

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_h x_h = 0$$ So che $x_0, \dots, x_h$ sono lin. indip. $\implies$

$$\lambda_0 = -\lambda_1 *_1 - \lambda_2 *_2 - \lambda * \dots - \lambda_h *_h$$

$$(\lambda_0 =)\ \lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_h = 0$$ –

Quindi ho mostrato che $w_1, \dots, w_n$ sono lin. indip.

$\bullet\bullet$) $w_j = x_j - \frac{a_{j1}}{a_{01}} x_0 =$

$$= a_{j1} y_1 + a_{j2} y_2 + \dots + a_{jn} y_n +$$

$$- \frac{a_{j1}}{a_{01}} \left(a_{01} y_1 + a_{02} y_2 + \dots + y_{0n} y_n \right)$$

i coefficienti di y_1 si sono cancellati tra loro, come nell'ES_

$$= \underbrace{\left(a_{j1} - \frac{a_{j1}}{a_{01}} \cdot a_{01} \right)}_{=0} y_1 + * y_2 + \dots + * y_n$$

$$\in \mathrm{Span}(y_2, \dots, y_n) \quad \_$$

Q. come costruire basi di un dato V?

<u>Lemma 1</u> dato V con $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$, $w_1, \dots, w_h \in V$ lin. indip. si ha $h \leq n$.

<u>Es</u> $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 \Rightarrow$ un insieme di 3 o più vettori in $\mathbb{R}^2$ è certamente lin. dipendente.

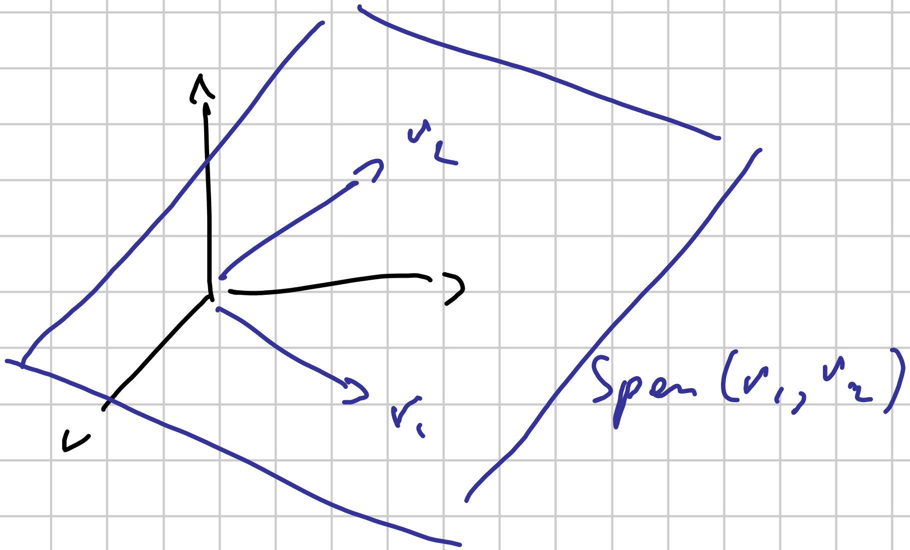
<u>Dim</u> segue dalla prop. se $v_1, \dots, v_n$ base, allora in partic. ho $w_1, \dots, w_h \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$

$\underset{\text{prop}}{\Rightarrow} h \leq n$.

Lemma 2 $v_1, \dots, v_k$ lin. indip. e v_0

$$v_0, v_1, \dots, v_k \text{ lin indip} \iff v_0 \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

ES $\mathbb{R}^3$



Se aggiungo un terzo vettore sul piano i 3 vettori sono lin. dip., viceversa, se aggiungo un terzo vettore fuori dal piano, ottengo 3 vett. lin indip.

Dim Lemma 2 devo mostrare

$v_0, v_1, \dots, v_k$ lin dip $\iff$ $v_0 \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

dimostrare $A \iff B$

è come dimostrare non $A \iff$ non B.

$\boxed{\Leftarrow}$ $v_0 \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ allora $v_0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

$\Rightarrow$ $(-1) v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ è combin. lin.

di $v_0, \dots, v_k$ con risultato 0, con NON tutti i coeff.

$= 0$, quindi $v_0, \dots, v_k$ sono lin dipendenti

[oss. : non ho usato ipotesi]

$\Longrightarrow$ $v_0, v_1, \ldots, v_k$ lin. dip., quindi esistono

$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ non tutti nulli t.c. $\mu_0 v_0 + \ldots + \mu_k v_k = 0$

Se fosse $\mu_0 = 0$ avrei $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$

ma $v_1, \ldots, v_k$ sono lin. indip. dunque

$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = 0$ non è possibile.

Allora $\mu_0 \neq 0$

$$v_0 = -\left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\right) v_1 - \cdots - \left(\frac{\mu_k}{\mu_0}\right) v_k$$

cioè $v_0 \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ ☐