

Alg. Lin 18/11/2015

$$\det_n(A) = \sum_{\sigma \in \underbrace{S_n}_{\mathbb{R}}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

OSS quanti termini nella somma

$n=1$	1
$n=2$	2
$n=3$	6
$n=4$	24
$n=5$	120
$n=6$	720

troppi!

Sviluppi di Laplace

Dato $A \in M_{n \times n}$ $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$A^{ij} :=$ la matrice ottenuta da A cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna.

ES $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -2 & \sqrt{11} & -1 \\ 4 & 9 & 13 \end{pmatrix}$ $A^{23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

Sviluppo lungo la riga j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ji} \cdot \det(A^{ji})$$

Sviluppo lungo le colonne j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

ES

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & \sqrt{3} & \pi \\ 2 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ -7 & 10 & -17 & 41 & 4 \\ 3 & 5 & -9 & 6 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{sviluppo}$$

$$= (-1)^{3+1} 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & \sqrt{3} & \pi \\ 10 & -17 & 41 & 4 \\ 5 & -9 & 6 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot * + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot * +$$

$$+ (-1)^{3+4} \cdot (11) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ -7 & 10 & -12 & 4 \\ 3 & 5 & -9 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+5} \cdot 0 \cdot \cancel{*}$$

$$\underline{\text{Ans}} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 7 & 11 \\ -9 & 3 & 0 & 71 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \cancel{*} + (-1)^{4+2} \cdot (11) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -9 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{4+3} \cdot (71) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 0 \cdot \cancel{*}.$$

Attenzione : Vediamo un metodo per creare terzi
in una matrice senza cambiare determinante.

Formula dello sviluppo : dimost. discende dalla
formula con $\sum_{G \in S_n} \dots$

Approccio alternativo alla teoria del determinante

Per $n = 1, 2, 3$ osserviamo queste proprietà :

1

det. è lineare in ciascuna colonna
fissate le altre

NON È LINEARE

$$M_{n \times n} \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$$

cioè

$$\det(v_1, v_2, \dots, \underbrace{\lambda v_j + \lambda' v_j}_{v_j}, v_{j+1}, \dots, v_n) \approx$$

$$= \lambda \cdot \det(v_1, v_2, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n) +$$

$$+ \lambda' \det(v_1, v_2, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{ES}} \quad \det \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \cdot 5 - \sqrt{3} \cdot 1 & 7 \\ 2 & \sqrt{2} \cdot 7 - \sqrt{3} \cdot 4 & 8 \\ 4 & \sqrt{2} \cdot 12 + \sqrt{3} \cdot 9 & 11 \end{pmatrix} &= \\
 = \sqrt{2} \det \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 12 & 11 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 2 & -4 & 8 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

[2] Il det cambia segno scambiando due colonne.

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{ES}} \quad \det \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 5 & 4 & 13 \\ -9 & 11 & e \end{pmatrix} &= - \det \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 13 \\ 11 & -9 & e \end{pmatrix} \\
 // \quad \text{--- I e III} & \quad \text{I e II}
 \end{aligned}$$

$$= - \det \begin{pmatrix} 11 & -2 & 7 & 3 \\ 13 & 4 & 5 & \\ e & 11 & -9 & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 4 & 13 & 5 \\ 11 & e & -9 \end{pmatrix}$$

OSS Se $\sigma \in S_n$ ho

$$\det(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma) \det(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

OSS Se due colonne sono uguali $\Rightarrow \det = 0$

$$\det(v_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{v}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{v}, \dots, v_n) \quad i \neq j$$

$$= - \det(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) \Rightarrow \det(0)$$

perdè $\det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$

3 $\det(I_n) = 1$

Teorema (non facile): esiste una e una sola
funzione $M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ A.c.:

1. è lineare in ciascuna colonna
2. cambia segno scambiando due colonne
3. vale 1 su I_n .

(si ritrova $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)})$

Conseguenze

1. il **det.** di una matrice con **due colonne uguali** vale **0** (stesso vale per le righe).
2. il det non cambia se sostituisco una colonna con se stessa + un multiplo di un'altra (stesso per le righe)

$$\det(v_1, \dots, v_i, \dots, \underbrace{v_j + \lambda v_i}_{\substack{\uparrow \\ \downarrow}}, \dots, v_n) =$$

$$= \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) +$$

$$+ \lambda \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

— due colonne uguali $\Rightarrow \det = 0$

Strategia per il calcolo del determinante

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ con n grande:

- c) creare molti zeri in una riga.
- e) Sviluppare lungo di essa.

Es

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -5 \\ 2 & -9 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 6 & -7 \\ 4 & 2 & -3 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -5 \\ -9 & 7 & -3 \\ 1 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -5 \\ -4 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -7 \\ 14 & 2 & -3 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 38 & 7 \\ -43 & -9 \\ 0 & 1 \\ 14 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi ottengo

$$= \det \begin{pmatrix} 38 & 7 & -38 & 44 \\ -43 & -9 & 61 & -66 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & 2 & -15 & 24 \end{pmatrix} \leftarrow =$$

$$= (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 38 & -38 & 44 \\ -43 & 61 & -66 \\ 14 & -15 & 24 \end{pmatrix} \leftarrow \text{diviso per 2}$$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} 19 & -19 & 22 \\ -43 & 61 & -66 \\ 14 & -15 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= (-2) \det \begin{pmatrix} 0 & -19 & 22 \\ 18 & 61 & -66 \\ -1 & -15 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{I}_c \rightarrow \underline{I}_c + \underline{II}_c$$

$$= (-2) \det \begin{pmatrix} 0 & -19 & 22 \\ 0 & 61 - 18 \cdot 15 & -66 + 18 \cdot 24 \\ -1 & -15 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{II}_2 \rightarrow \underline{II}_2 + 18 \underline{III}_2$$

$$= \underline{(-2)} \cdot \underline{(-1)^{3+1} \cdot (-1)} \det \begin{pmatrix} -18 & 22 \\ 61 - 18 \cdot 15 & -66 + 18 \cdot 24 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(-18 \cdot (-66 + 18 \cdot 24) - 22 (61 - 18 \cdot 15) \right) =$$