Alg. Lin 17/11/2015

Definizione di DETERMINANTE

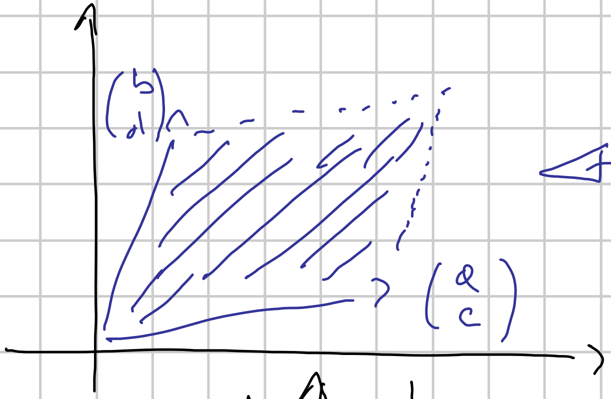
Per $A \in M_{1\times 1}$ $A = (a)$ pongo $\det(A) = a$

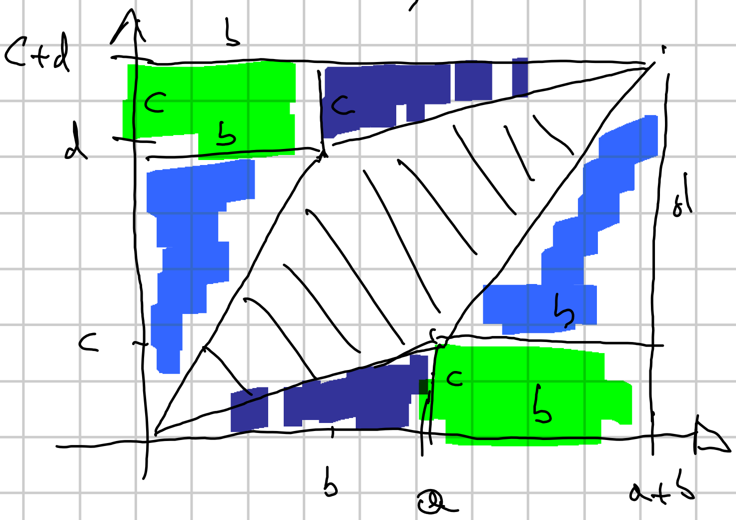
ho A invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Per $A \in M_{2\times 2}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ voglio un numero che dice se $\exists$ A^{-1}

cioè A invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

chiamo det(A) l'area di





$$\det(A) = \text{area}\left(\quad\right) =$$

$$= (a+b)(c+d) +$$

$$-\,2\,b\,c$$

$$-\,2\cdot\frac{1}{2}\,c\cdot a$$

$$-\,2\,\frac{1}{2}\,d\cdot b =$$

$$= \cancel{ac} + ad + \underline{bc} + \cancel{bd} - \underline{2bc} - \cancel{ac} - \cancel{bd} =$$

$$= ad - bc$$

<u>ES</u> $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 5 \cdot 1 - 7 \cdot 2 = -9$

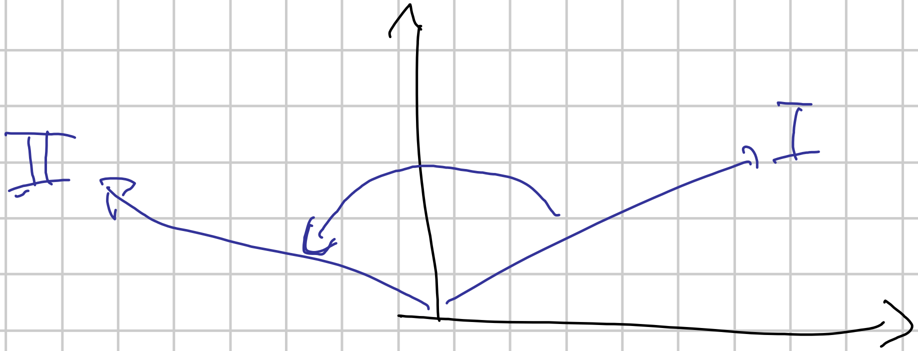
$\Rightarrow$ non è semplicemente l'area, ma l'area con segno:

il <u>valore assoluto</u> è l'area,

il <u>segno</u> è:

$A = (\mathrm{I}, \mathrm{II})$:

se $\det(A) = 0 \Rightarrow \mathrm{I}$ e II sono proporzionali (segno non importa) altrimenti



la rotaz. da' meno di 180° dal I al II

antioraria

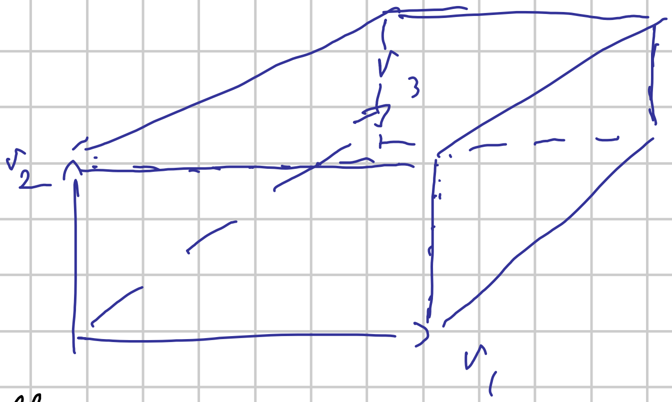
$\det(A) > 0$

oraria

$\det(A) < 0$

$n = 3$ $\quad \det(A) =$ volume (con segno) del parallelepipedo che ha per lati le colonne di A

$$A = (v_1, v_2, v_3)$$



$\det(A) =$ volume di

Calcolo analogo a quello 2-dim $=$

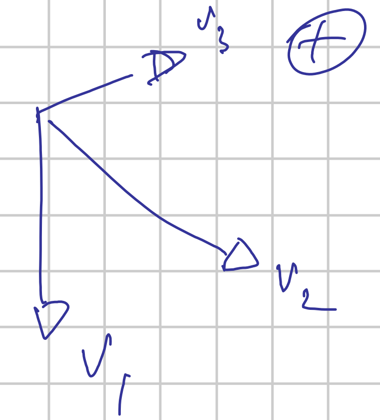
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$\leftarrow$ regola di SARRUS

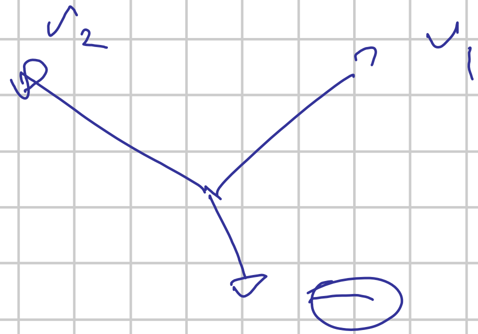
$$\boxed{\begin{aligned} &= + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &\quad - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}}$$

<u>Segno</u> $\det(v_1, v_2, v_3)$ ha segno:

- nullo se v_1, v_2, v_3 sono lin dip.
- positivo se v_1, v_2, v_3 è terna levogira <u>cioè</u> è possibile disporre pollice, indice e medio della mano dx lungo le direzioni v_1, v_2, v_3



segno positivo



oppure: se ruoto una vite nella direzione $v_1 \curvearrowright v_2$ allora si sposta nella direzione v_3 (se segno > 0)

Per $n \geq 4$: allo stesso modo

$\det(v_1, \dots, v_n) =$ "volume n-dimensionale con segno dell'iperparallelepipedo con lati $v_1, \dots, v_n$

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

n	# addendi	ogni addendo è prodotto di ... coeff. delle matr.		sgn
1	1	1	$\begin{pmatrix}\odot\end{pmatrix}$	+
2	2	2	$\begin{pmatrix}\odot & \cdot \\ \cdot & \odot\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\cdot & \odot \\ \odot & \cdot\end{pmatrix}$	+/−
3	6 = 3!	3	$\begin{pmatrix}\odot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \odot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \odot\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\cdot & \odot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \odot \\ \odot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \odot \\ \odot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \odot & \cdot\end{pmatrix}$	+++
			$\begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \odot \\ \cdot & \odot & \cdot \\ \odot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\odot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \odot \\ \cdot & \odot & \cdot\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\cdot & \odot & \cdot \\ \odot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \odot\end{pmatrix}$	−−−
n	n!	n		

Tutti: su righe/colonne diverse

in generale sulla prima riga scelgo uno degli n coeff.

sulla seconda riga scelgo uno

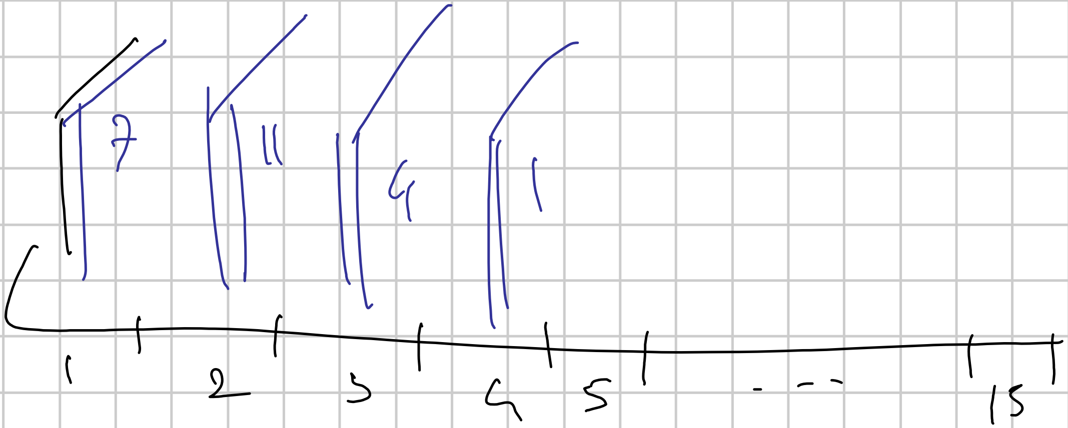
degli $(n-1)$ coeff che stanno su una nuova colonna
sulla stessa riga scelgo uno degli $(n-2)$ coeff. che stanno su una colonna nuova

in generale $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1 = n!$

Segno?

Permutazioni

Una permutazione degli oggetti $\{1,\dots,n\}$ è funzione bigettiva $\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$, cioè un modo di riordinare tali oggetti



riordinamento a cui corrisponde

$\sigma : \{1, \dots, 15\} \longrightarrow \{1, \dots, 15\}$

$\sigma(1) = 7$ $\qquad$ $\sigma(4) = 1$

$\sigma(2) = 11$ $\qquad$ $\dots$

$\sigma(3) = 4$

corrispondenza tra funzioni bigettive su $\{1, \dots, n\}$ e riordinamenti.

Indico l'insieme di tutte le permutazioni $\{1, \dots, n\}$ con $\mathfrak{S}_n$

<u>OSS</u> nel $\det(A)$ un addendo è del tipo:

$$\pm \, a_{1,j_1} \, a_{2,j_2} \, a_{3,j_3} \cdots a_{n,j_n}$$

e $j_1, \dots, j_n$ sono tutti distinti, cioè sono un riordinamento di $\{1, \dots, n\}$ e posso porre

$$j_i = \sigma(i)$$

ES nel det di una 5×5 compare

$$\pm \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} 1 \longmapsto 2 \\ 2 \longmapsto 5 \\ 3 \longmapsto 3 \\ 4 \longmapsto 1 \\ 5 \longmapsto 4 \end{array}$$

$$\pm\, a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \pm \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

produttoria

<u>Morale</u> $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{segno}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

devo dire chi è

<u>Def</u> chiamo <u>trasposizione</u> un elemento di $\mathfrak{S}_n$ ← tutte le permutazioni che scambia tra loro esattamente due elementi

es: i_1 e i_2

$i_1 \neq i_2$

$$\sigma(i) = \begin{cases} i_2 & \text{se } i = i_1 \\ i_1 & \text{se } i = i_2 \\ i & \text{se } i \neq i_1, i_2 \end{cases}$$

Fatto (facile) ogni permutazione è composizione di trasposizioni.

Fatto (meno facile): il modo di esprimere una certa $\sigma \in S_n$ come composizione di trasposizioni non è unico, ma la parità del numero di trasposizioni dipende solo da σ.

Scrivo una permutazione σ come

$$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n))$$

"fotografia dello scaffale riordinato" $(7, 11, 4, 1, \ldots)$

ES $S_8 \ni (4, 6, 5, 2, 1, 3, 8, 7)$

$$(4,6,5,2,1,3,8,7) \xrightarrow{1} (1,6,5,2,4,3,8,7) \xrightarrow{2} (1,2,5,6,4,3,8,7) \xrightarrow{3} (1,2,3,6,4,5,8,7) \xrightarrow{4} (1,2,3,4,6,5,8,7)$$

$$(4,6,5,2,1,3,8,7) \xrightarrow{1} (4,5,6,2,1,3,8,7) \xrightarrow{2} (4,5,2,6,1,3,8,7) \xrightarrow{3} (4,2,5,6,1,3,8,7) \xrightarrow{4} (2,4,5,6,1,3,8,7) \xrightarrow{5} (2,4,5,1,6,3,8,7)$$

1 5

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7)

1 6

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

6 e 12 sono distinti, ma sono entrambi pari

1 6

(2, 4, 1, 5, 6, 3, 8, 7)

7

(2, 1, 4, 5, 6, 3, 8, 7)

8

(1, 2, 4, 5, 6, 3, 8, 7)

9 (

(1, 2, 4, 5, 3, 6, 8, 7)

10 (

(1 2 4 3 5 6 8 7)

11 (

(1 2 3 4 5 6 8 7)

12 (

(1 2 3 4 5 6 7 8)

Def $\quad \operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è composizione di un numero PARI di trasposizioni} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

ES nel det della 5×5 compare

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$1 \longmapsto 2$

$2 \longmapsto 5$

$3 \longmapsto 3$

$4 \longmapsto 1$

$5 \longmapsto 4$

come segno: $(2, 5, 3, 1, 4)$

1

$$(1, 5, 3, 2, 4)$$

$$\downarrow \quad 2$$

$$(1, 2, 3, 5, 4)$$

$$\downarrow \quad 3$$

$$(1, 2, 3, 4, 5)$$

compare $\sim a_{12} \cdot a_{25} \cdot a_{33} \cdot a_{41} \cdot a_{54}$

<u>Conclusione</u> (def. di determinante $n \times n$)

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{A}), \quad \det{}_n(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Proprietà $\quad \det({}^tA) = \det(A)$

"dim"

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det({}^tA) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)\, \underbrace{({}^tA)_{1,\tau(1)}\, ({}^tA)_{2,\tau(2)} \cdots ({}^tA)_{n,\tau(n)}}_{\text{posso riscrivere}}$$

$$\sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau)\, \underbrace{a_{\tau(1),1}\, a_{\tau(2),2} \cdots a_{\tau(n),n}}$$

$$a_{1,\tau^{-1}(1)}\, a_{2,\tau^{-1}(2)} \cdots a_{n,\tau^{-1}(n)}$$

pongo $\sigma = \tau^{-1}$

(va bene perché al variare di $\tau \in S_n$ si ha che τ^{-1} varia tra tutti gli el. di S_n)

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}$$

si conclude dicendo $\operatorname{sgn}(\tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau)$

perché se $\tau = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \ldots \circ \rho_k$ (ρ_j trasposizioni)

$\Rightarrow \tau^{-1} = \rho_k \circ \ldots \circ \rho_2 \circ \rho_1$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^k$ ∎