

Alp Lin 14/10/15

X, Y insiemi; funzione $f: X \rightarrow Y$
una legge che associa a ogni el. d. X uno el. d. Y .
 $\uparrow$ $\uparrow$
 x $f(x)$

Scrivo: $f: X \rightarrow Y$
 $x \mapsto f(x)$

Es. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - 7x + \sqrt{5}$

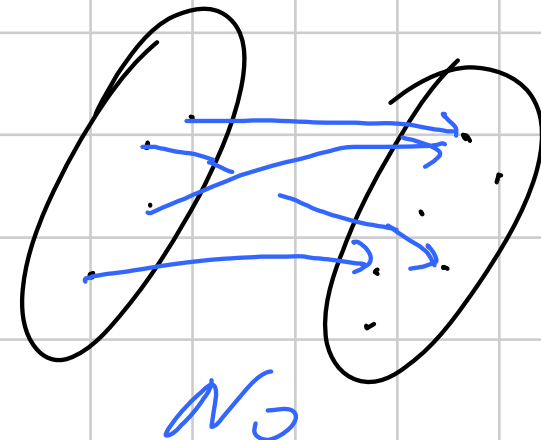
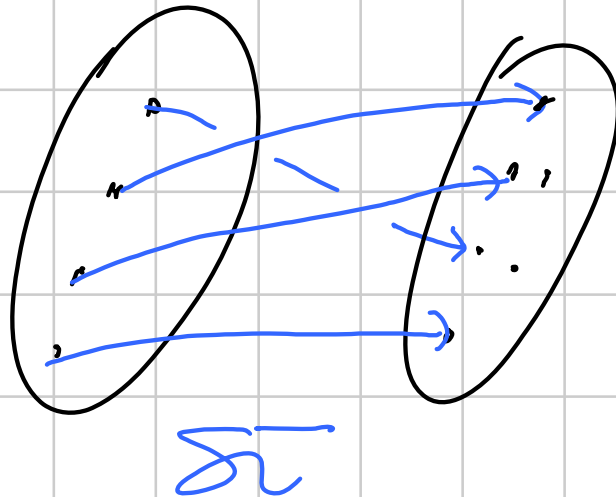
At: Per determinare una funzione
non basta la sua espressione
ma bisogna dare dominio e codominio.

Es: $f(x) = x^2$ Non definisce funzione.

Def: $f: X \rightarrow Y$ è iniettiva se (espressioni equiv):

- manda pt diversi di X in pt diversi di Y
- dati $x_1, x_2 \in X$ con $f(x_1) = f(x_2)$ si ha per forza
 $x_1 = x_2$

- dato $y \in Y$ esiste al più un x di X
t.c. $f(x) = y$

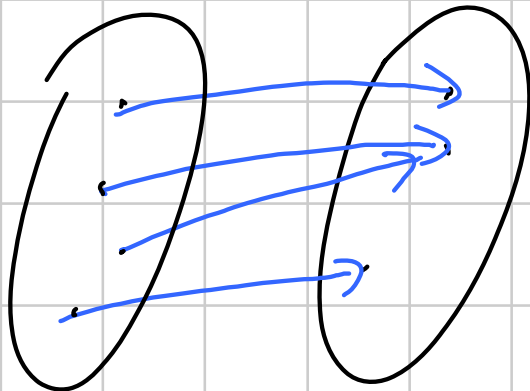


Def: $f: X \rightarrow Y$ è suriettiva se

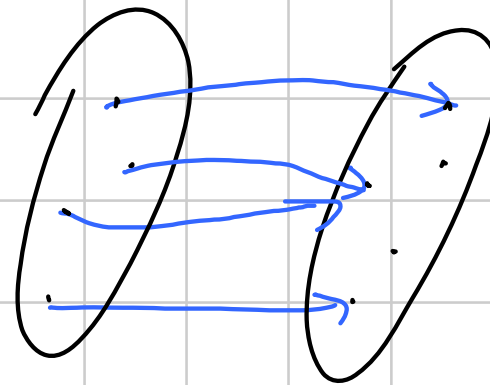
- tutti i punti di Y sono valori di f

- per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$
- $\text{Im}(f) = Y$

(Def: $\text{Im}(f) = \{ f(x) : x \in X \}$ immagine.)

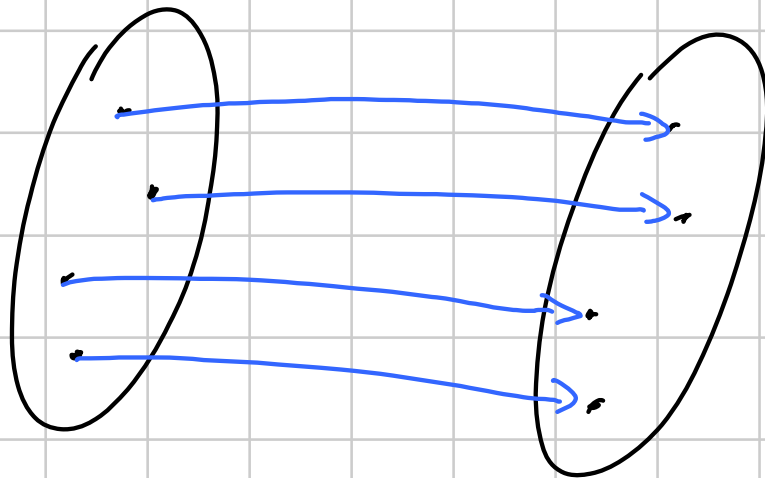


Si



No

Def: $f: X \rightarrow Y$ è bijettiva se è iniettiva e suriettiva
cioè: per ogni $y \in Y$ esiste unico $x \in X$ t.c. $f(x) = y$.



Def: composizione: date
 ciascuno " le

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ X & \xrightarrow{g \circ f} & & & Z \end{array}$$

defo da $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X$ -

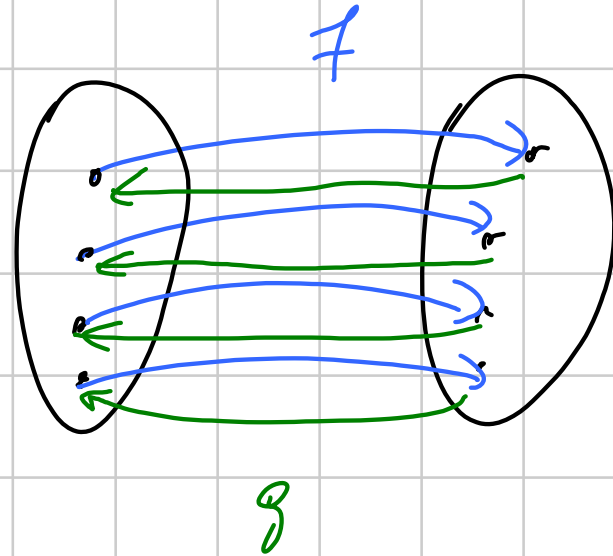
Chiamo funzione identità di X la
 $\text{id}_X : X \rightarrow X$
 $x \mapsto x$ -

Dico che $f : X \rightarrow Y$ è invertibile se esiste
 $g : Y \rightarrow X$ t.c. $g \circ f = \text{id}_X$
 $f \circ g = \text{id}_Y$ -

Tale g è detta inversa di f .

Vuoi che facili:

- f invertibile $\iff f$ bijective



- l'inverse se esiste è unica

Def: dato $f: X \rightarrow Y$ e $A \subset Y$ chiamo
preimmagine di A tramite f

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

Es: $f(x) = x^2$ Interpretazioni:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva? No Surgettiva? No
- $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva? SÌ Surgettiva? No
- $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ iniettiva? SÌ Surgettiva? SÌ

2.3.14

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$$

$$m \mapsto (m^2, 3m-2)$$

iniettiva? $m, n \in \mathbb{N}$, $f(m) = f(n) \not\Rightarrow m = n$

$$(m^2, 3m-2) = (n^2, 3n-2) \quad \text{Sì}$$

suriettiva? $\forall (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2 \nexists m \in \mathbb{N} \text{ t.c.}$

$$(m_1, m_2) = f(m)$$

$$\text{cioè } (m_1, m_2) = (m^2, 3m-2) \quad \text{No}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{(m, m) : m \in \mathbb{N}\}) &= \\ &= \{m \in \mathbb{N} : f(m) \text{ ha le due componenti uguali}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{n \in \mathbb{N} : n^2 = 3n - 2\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} : n^2 - 3n + 2 = 0\} \\
&= \{1, 2\} -
\end{aligned}$$

2.3.15 $P = \overset{\text{nat}}{\{ \text{pari} \}}$ $D = \overset{\text{nat}}{\{ \text{dispari} \}}$

$f: P \rightarrow D$ bijective

$f(m) = m + 1$

0	2	4	6	-	-
1	3	5	7	.	~

$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$ bijectiva

$$g(m) = 2m$$

0	1	2	3	4	...
0	2	4	6	8	...

$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

0 1 2 3 4 5

-2 -1 0 +1 +2

0 1 2 3 4 5, 6, 7, 8, ...

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...

$$h(m) = \begin{cases} (m+1)/2 & \text{se } m \text{ \u00e9 dispari} \\ -m/2 & \text{se } m \text{ \u00e9 pari} \end{cases}$$

2.3.16 • X, Y con n el, $f: X \rightarrow Y$ iniettiva
 $\Rightarrow f$ biettiva

Per induz su $n \geq 1$. $n=1$ ✓

P.I.: sia vero per n .

Prendo X', Y' con $n+1$ el. $f': X' \rightarrow Y'$ iniettiva.

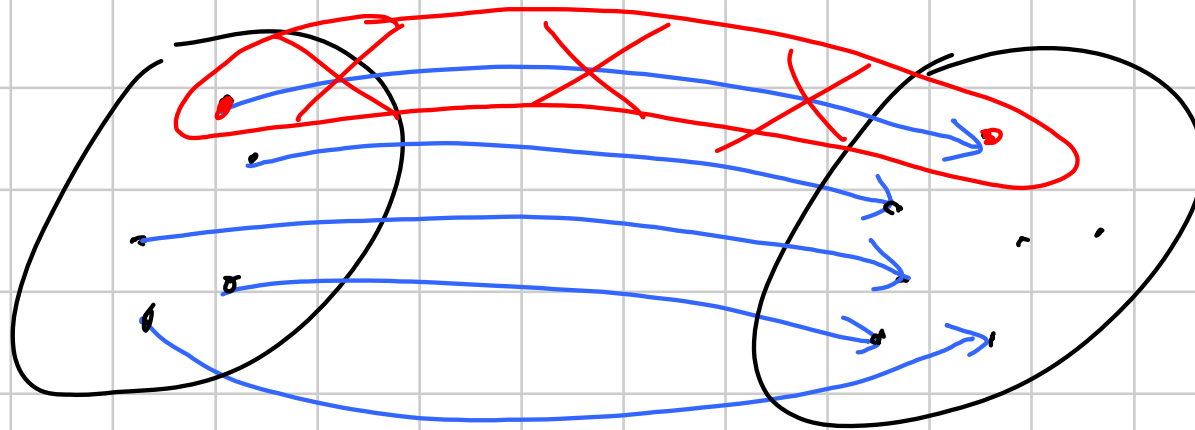
Scelgo $x' \in X'$ a caso, pongo $X = X' \setminus \{x'\}$

$Y = Y' \setminus \{f'(x')\}$ e noto che

per $x \in X$ si ha $x \neq x' \Rightarrow f'(x) \neq f'(x')$

$\Rightarrow f'(x) \in Y$. Quindi posso definire

$f: X \rightarrow Y$ come $f(x) = f'(x)$.



Quotante tale f è iniettiva $\implies f \in \text{surjective}$
 $\implies f' \in \text{surjective}$ -

- X, Y con n el. $f: X \rightarrow Y$ surgettiva
 $\implies f$ iniettiva -

Per ogni $y \in Y$ scelgo a caso $x \in X$ t.c.
 $f(x) = y$ e posto $g(y) = x$ - Ho costruito
 $g: Y \rightarrow X$ invertiva:

$$g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow f(g(y_1)) = f(g(y_2)) \\ \Rightarrow y_1 = y_2$$

Una g è invertibile $\Rightarrow f$ è invertibile -

2.3.17 $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 2$ $\mathbb{F}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$
 = tutti i possibili resti
 delle divisioni $k:m$

$$\underline{\text{Def}} \quad a + b = \text{resto di } (a + b) : m$$

$\uparrow$ nuovo $\uparrow$ solita

$$a \cdot b = \text{resto di } (a \cdot b) : m$$

$\uparrow$ nuovo

(aritmetica modulo m) -

Es : $m = 7$

$$4 + 5 = 2$$

$$4 \cdot 5 = 6 -$$

Fatto : valgono sempre tutte le proprietà di
campo tranne esistente il verso molt. (6).

$$\begin{array}{lcl} \text{Es: } a, b & a+b : m & \longrightarrow \text{resto} \\ & b+a : m & \longrightarrow \text{resto} \end{array}$$

tutte facili.

Fatto : la 6 vale se e solo se m è primo.

* se m non è primo la 6 non vale :

Oss: se $a \cdot b = 0$ con $b \neq 0$ allora a non
può avere inverso;

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot a \cdot b = 1 \cdot b = b \quad \text{No}_-$$

Es: $m = 12$ $2 \cdot 6 = 0$
 $\Rightarrow$ non hanno inverso_

In generale se m non è primo ho
 $m = a \cdot b$ con $1 < a < m$

$\Rightarrow a, b$ non hanno inverso — ($a \cdot b = 0$ in F_m)

* Se m è primo, dato $a > 0$ ($a < m$)
cerco il suo inverso, cioè cerco b t.c.

$a \cdot b = 1$ — è sufficiente provare che

$\exists : \{0, 1, \dots, m-1\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$

$k \longmapsto a \cdot k$

è surgettiva — Grazie a 2.3.16

basta vedere che è iniettiva :

Supponiamo $a \cdot k = a \cdot h$ in F_m
cioè $a \cdot (k-h) = 0$ in F_m
cioè $(a \cdot (k-h)) : m$ ha resto 0
cioè m divide $a \cdot (k-h)$;

ora m è primo $\Rightarrow$ divide a oppure $|k-h|$
 $1 < a < m$: m non divide a
 $0 \leq k, h \leq m-1 \Rightarrow |k-h| < m \Rightarrow k-h=0$
 $\Rightarrow k=h$

Prova che è iniettiva.

2.3.18

$$F = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = 0\}$$

$$F \cup G = \{x \in \mathbb{R}^2 : u(x) = 0\} \quad u(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0 \text{ oppure } g(x) = 0\}$$

$$F \cap G = \{x \in \mathbb{R}^2 : v(x) = 0\} \quad v(x) = |f(x)| + |g(x)|$$

$$\hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = g(x) = 0\}$$

La relaz. data definisce un sottosp. vett. $W \subseteq V$?

3.2.1 $V = \mathbb{R}^n$

$$\bullet \sum_{j=1}^n \sqrt{j-1} \cdot x_j = 0$$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \sqrt{2} \cdot x_3 + \sqrt{3} \cdot x_4 + \dots = 0$$

$$\bullet \sum_{j=1}^n x_j^j = 0 \quad (n=1 \quad x_1=0 \quad \checkmark) \quad \text{S2}$$

$$n > 1 \quad x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots = 0$$

Non è pol. di I grado omg.

1 $0 \in W$ ✓

2 $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

3 $\lambda \in \mathbb{R} \ w \in W \Rightarrow \lambda \cdot w \in W$

$\mathcal{B}_5: \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in W \quad (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$

No

Volendo:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\in W} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\in W} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$$

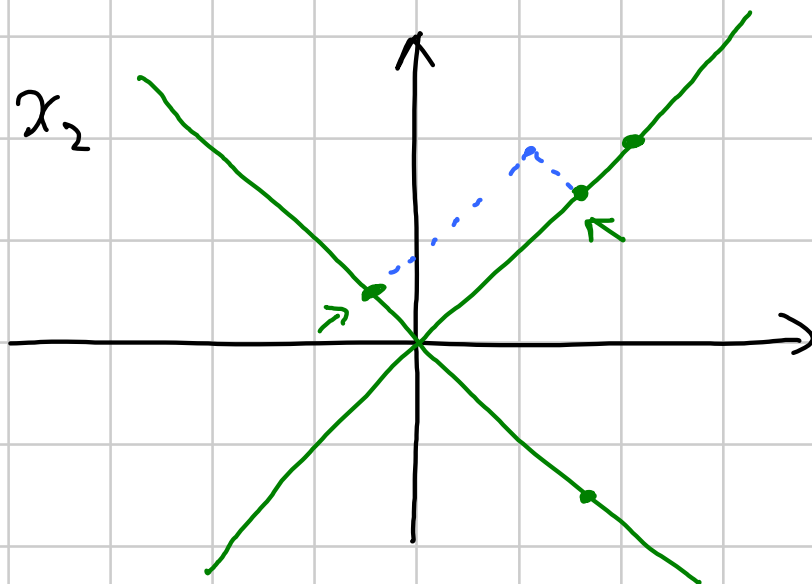
• $x_1^2 = x_2^2$

$x_1 = \pm x_2$

1 ✓

2 NO: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 ✓



- $x_1^3 = x_2^3 \iff x_1 = x_2$

$\sum$

- $\cos(x_1 + \dots + x_m) = \underline{1}$

1. ✓

2. $\cos(x_1 + \dots + x_m) = 1$

$\cos(y_1 + \dots + y_m) = 1 \Rightarrow \cos(x_1 + \dots + y_1 + \dots) = 1?$

$$x_1 + \dots + x_m = 2k\pi \quad y_1 + \dots + y_m = 2h\pi$$

$$x_1 + \dots + y_1 + \dots = 2(k+h)\pi \quad \sum =$$

$$3. \cos(x_1 + \dots + x_n) = 1 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \cos(\lambda x_1 + \dots + \lambda x_n) = 1 ?$$

$$\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in W \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$$

$$\boxed{3.2.2} \quad V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$\bullet (A)_{1,1} \cdot (A)_{m,m} = 0 \quad \text{pol. ann. } \Pi_{\text{prod}}$$

$$1. \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3,

~

No

$$(A) : (A)_{1,1}^{468} = 0 \quad \Sigma$$

$$(A)_{1,1}^8 + (A)_{m,m}^{12} = 0$$

$$\text{equivale} \quad \left\{ \begin{array}{l} (A)_{1,1} = 0 \\ (A)_{m,m} = 0 \end{array} \right. \quad \Sigma)$$

$$\bullet \sum_{j=1}^{\min(m,m)} (A)_{j, m+1-j} = 0 \quad \Sigma$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\bullet \sum_i \sum_j \frac{\sqrt{i} - \sqrt{j}}{\sqrt{i} + \sqrt{j}} \cdot (A)_{ij} = 0$$

$$\bullet \sum (A)_{ij}^2 = 0$$

Equivalente

$$\left. \begin{array}{l} (A)_{11} = 0 \\ (A)_{22} = 0 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$\sum$

• $| (A)_{i,j} | \leq \epsilon \quad \forall i,j$

1. ✓

2. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & - & - \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & - \end{pmatrix}$

✓