

Alg. Lin. 14/10/2015

V sp. vett. su $\mathbb{R}$

Combin. lin. di $v_1, \dots, v_n$ con coeff. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

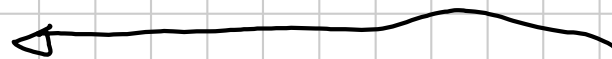
$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Def. $\exists$! minimo sp. vett. che contiene $v_1, \dots, v_n$
dato da tutte le combin. lin. -

$\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ = generato da $v_1, \dots, v_n$

Q: ogni $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ ha unica espress

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$



cioè sono unici gli $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ che danno)?

Q_0 : $0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ ha un'unica espressione
 $0 = 0v_1 + \dots + 0v_n$?

Oss $Q \rightarrow S_1^L \Rightarrow Q_0 \rightarrow S_1^L$
vale anche il viceversa

Def diciamo che $v_1, \dots, v_n$ sono **lin. indipendenti**
se l'unica combin. lin. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$
che ha come risultato 0 è quella con $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

(più propriamente dovrei dire che l'insieme
 $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente indipendente)

Prop se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indep. allora ogni
 $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ ha unica espress. come comb. lin.

Dik devo dire che se $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n =$
 $= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

allora $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Infatti

$$0 = (v - v) = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n$$

che è una comb. lineare con risultato nullo

$\Rightarrow$ i coeff. $\alpha_i - \beta_i$ sono tutti 0, cioè $\alpha_i = \beta_i \forall i$ $\square$

ES (v_i) è lin. indep. se l'unica espression.

$\lambda \cdot v_i$ che vale 0 è $0 \cdot v_i$

• Se $v_i = 0$ non succede $\sqrt{2} \cdot v_i = 0$

• Se $v_i \neq 0$ si visto che se $\lambda \neq 0, v_i \neq 0 \Rightarrow \lambda \cdot v_i \neq 0$.

Moale (v_i) è lin. indep. $\Leftrightarrow v_i \neq 0$

OS Se $(v_1, \dots, v_n)$ è lin. indep. allora qualsiasi sottoinsieme di $(v_1, \dots, v_n)$ è lin. indep. - In particolare

se uno dei v_j è $= 0$ allora $(v_1, \dots, v_n)$ non può essere lin. indep.

ES $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 74 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 36 \\ \pi \end{pmatrix}$$

sono lin indep.?

Cioè: gli unici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha \begin{pmatrix} 74 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 36 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
sono $\alpha = 0$ e $\beta = 0$?

$$\begin{cases} \alpha \cdot 74 + \beta \cdot 36 = 0 \\ \alpha \cdot 3 + \beta \cdot \pi = 0 \end{cases}$$



Si reduce in un sistema di eqnes.

guardando le componenti

L'unica soluz. è $\alpha = 0$ e $\beta = 0$?

Dalla II eq $\alpha = -\frac{\pi}{3}\beta$. Sostituisco nella I eq.

$$\left(-\frac{\pi}{3}\beta\right) \cdot 74 + \beta \cdot 96 = \underbrace{\left(-\frac{74}{3}\pi + 96\right)}_{>0} \beta = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot \underbrace{(-74 \cdot \pi + 288)}_{>0}$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 0$$

$\Rightarrow$ Si: $\alpha = 0, \beta = 0$ è l'unica soluzione

$$\underline{\text{ES}} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(v_1, v_2, v_3) è lin. indip.? cioè

$$\begin{cases} 5\alpha - 3\beta - 9\gamma = 0 \\ 2\alpha + 6\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

ha uniche soluzioni $\alpha = \beta = \gamma = 0$?

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5\alpha - 3\beta - 9\gamma = 0 \\ \gamma = 2\alpha + 6\beta \end{cases}$$

sostituire γ in 1 eq.

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5\alpha - 3\beta - 9(2\alpha + 6\beta) = 0 \\ \gamma = 2\alpha + 6\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13\alpha - 57\beta = 0 \\ \gamma = 2\alpha + 6\beta \end{cases}$$

$$\alpha = 57$$

$$\beta = -13$$

$$\gamma = 2 \cdot 57 - 6 \cdot 13$$

è soluz. non nulle del sistema $\Rightarrow$ sono lin. dip.

(lin. dipendenti è il contrario di lin. indipend.)

$$\cdot \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{lin. indep?}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$$

$$\begin{cases} 3\alpha - 15\beta = 0 \\ -6\alpha + 10\beta = 0 \end{cases} \quad \text{ha unica soluz. } \alpha = 0, \beta = 0 ?$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 3\alpha - 5\beta = 0 \\ 3\alpha - 5\beta = 0 \end{cases}$$

diviso I eq per 3

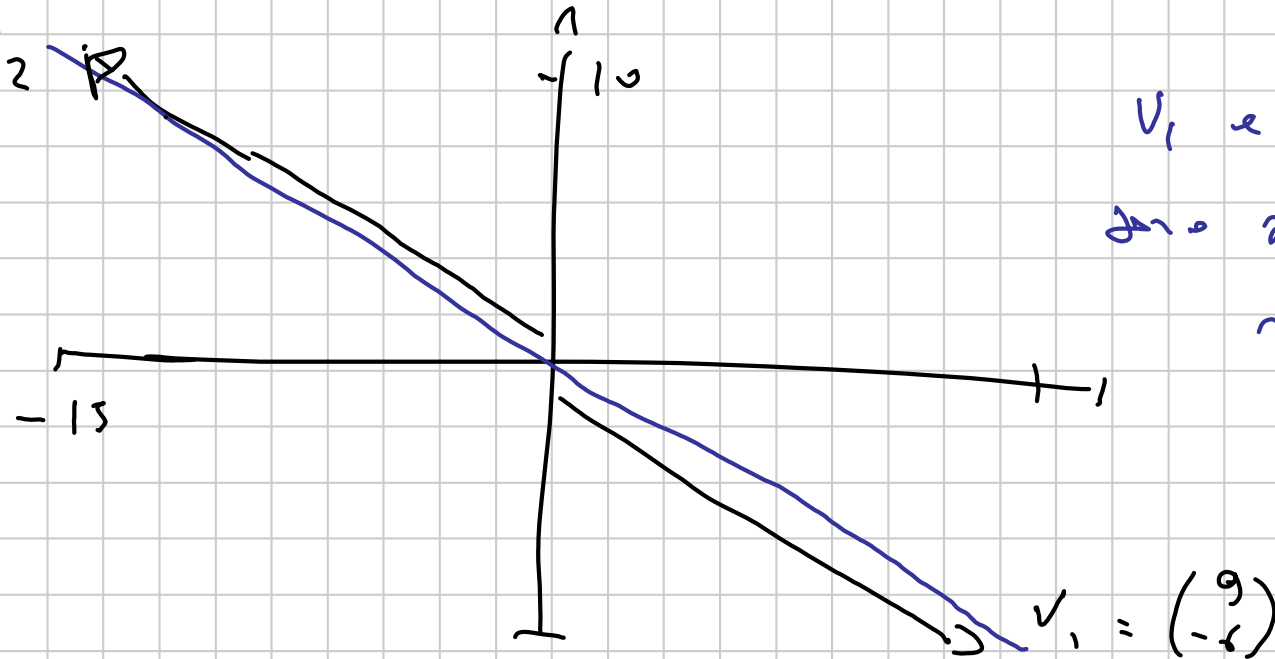
diviso II eq per -2

No $\alpha = 5, \beta = 3$ è soluz non nulla del sistema
 $\Rightarrow v_1, v_2$ non sono lin indep.

(orthogonale Basis und $\alpha = \frac{\sqrt{431}}{\pi}$ $\beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{431}}{\pi}$)

OSS $v_2 = -\frac{3}{5} v_1$

$\begin{pmatrix} -15 \\ 10 \end{pmatrix} = v_2$



v_1 & v_2
 sind zueinander
 orthogonal

Lemma (v_1, v_2) sono lin. dip. $\Leftrightarrow$ uno dei due è
multiplo dell'altro -
(comprende il caso in cui
un vettore è nullo)