

Alg Lin 13/11/2015

$$, \quad [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \quad f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

$$\underline{\text{Prop}} \quad \mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M \quad \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cdot N$$

$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = N^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M$$

$$\underline{\text{Prop}} \quad V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z \quad \text{lineari}$$

$\mathcal{B} \quad \mathcal{C} \quad \mathcal{D} \quad \text{basi}$

$$\Rightarrow [g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Dim

So we

$$f \cdot B = E \cdot [f]_B^E$$

$$g \cdot E = D \cdot [g]_E^D$$

$$\Rightarrow \underbrace{(g \circ f)} \cdot B = g(f \cdot B) = g(E \cdot [f]_B^E) =$$

$$= g \cdot E \cdot [f]_B^E = D \cdot \underbrace{[g]_E^D \cdot [f]_B^E}_{\text{"}}$$

$$[g \circ f]_B^D \quad \square$$

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistema di m espressioni lineari nelle incognite $x_1, \dots, x_n$
con coefficienti a_{ij} e termini noti b_i

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

incognite;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

← *matr. dei coeff.*
 $= A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

vettore dei termini noti

$$\boxed{A \cdot x = b}$$

← con le notazioni di A, x, b
il sistema si risolve con:

OSS Ved. A come $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ - si ha che
il sistema ha soluzione $\Leftrightarrow b \in \text{Im}(A)$

AmAi

$$\{\text{soluz di } A \cdot x = b\} = \bar{A}^{-1}(b)$$

↑
preimmagine di b (non inversa)

"Anch' i vett x che moltip. per A danno b

cioè $Ax=b$ //

DSS se $m=n$ e A è invertibile le soluz.
di $A \cdot x = b$ esiste unica ed è $x = \underbrace{A^{-1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{la matrice inversa di } A}} \cdot b$

Pb Come decidere se A è invertibile?
Se sì, come trovare A^{-1} ?

Def Se $f: V \rightarrow W$ lineare, chiamo rango di f
 $\text{rank}(f) := \dim(\text{Im } f)$

Se A è una matrice, chiamo $\text{rank}(A)$ il rango dell'applicazione lineare associata -

Oss Poiché le colonne di A generano $\text{Im}(A)$
ho $\text{rank } A = \dim(\text{spazio generato dalle colonne})$
 $=$ massimo numero di elementi di un insieme di
colonne di A che è insieme di vettori lin indip
di $\text{Im}(A)$
 $=$ cioè il numero di elem. di una base ^{di $\text{Im}(A)$} estratta dall'insieme
delle colonne di A -

ES

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{Im}(A) = ?$$

$$A(e_1^{(3)}) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A(e_2^{(3)}) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A(e_3^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

l'Im A è generata da

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \quad \cancel{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}, \quad \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

estraggo base di Im A

2 elementi

$$\Rightarrow \text{rk}(A) = 2$$

Teo (Rouché - Capelli)

ha soluzione se e solo se $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, b)$

il sistema $A \cdot x = b$

matrice del
sistema
incomplete

matrice
complete

Dim esiste soluzione

$$\Leftrightarrow b \in \text{Im } A$$

$\Leftrightarrow$ se aggiungo b a $\text{Im } A$ la dim non sale

$$\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A, b)$$

□

Chiamo omogeneo un sistema con $b = 0$

cioè $A \cdot X = 0$

In tal caso $\{\text{soluz.}\} = \{x : A \cdot x = 0\} = \text{Ker}(A)$
è sottosp. vett. di $\dim = n - \text{rank}(A)$

↑ formula della dimensione

Prop la soluz generale di

un sistema non omogeneo è la somma di una
soluz. particolare e della soluz generale del sistema
omogeneo associato.

Così ^{per risolvere} $A \cdot x = b$

, trovo x_0 : $A \cdot x_0 = b$ e allora

$$\{x : Ax = b\} = \{ \underbrace{x_0}_{\substack{\uparrow \\ x_0 \text{ è fissato} \\ \text{(non è importante chi sia)}}} + y : \exists c \quad \underbrace{A \cdot y = 0}_{\substack{\uparrow \\ y \text{ è soluz di} \\ \text{omog. associata}}} \}$$

Dim

$$A \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot x = A \cdot x_0$$

$$\Leftrightarrow A \cdot (x - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - x_0 = y \quad \text{con} \quad A \cdot y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 + y \quad \text{con} \quad A \cdot y = 0 \quad \square$$

Terminologie per un sistema di m equazioni con n incognite:

il sistema si dice:

- sottodeterminato se $m < n$
- quadrato se $m = n$
- sovradeterminato se $m > n$

OSS un sist omogeneo sottodeterm. ha come soluz.

un sottosp vett. di $\dim \geq n - m$

$\Rightarrow$ infinite soluzioni (∞^k , con $k \geq n - m$)

Possibilità

per soluz.

	omogenea	non omogenea
sotto det.	sempre infinite	nessuno o infinite
quadrato o sovradeterminato	una o infinite	una, nessuno o infinite

Come risolvere un sistema:

• ridurlo a equazioni

- ricavare una variabile da un'eq. e sostituirla nelle
- sostituire un'eq. con la stessa più ^{altre}
il multiplo di un'altra
- sostituire un'eq. con un suo multiplo non nullo

$$\underline{ES} \quad \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 9y = -1 \end{cases}$$

$$9I + 5II \quad \begin{cases} 37x = 58 \\ - \quad - \quad - \end{cases}$$

Q. Come decidere se esiste A^{-1} e come trovarlo?

Come calcolare $\text{rank } A$?

OSs $A \in M_{n \times n}$ è invertibile $\Leftrightarrow$ è surgettiva come
app.

$$\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$$

In generale la risposta è legata al determinante
di A —

ESERCIZI

ES S.2.11

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 : \sum x_i = 0\}$$

$$W = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Z = \{x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0\}$$

$$P(x) =$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 & 4 & 10 & 14 \\ 9 & 11 & 15 & 21 \\ -27 & -18 & -40 & -63 \\ 12 & 8 & 20 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$$

proiet. su Z

$$P^2 = P$$

Scelgo

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

base di V

v_1

v_2

v_3

$$M = [P]_B^B$$

$$P(v_1) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} v_1 + \frac{9}{5} v_2 - \frac{4}{5} v_3 \quad \textcircled{\times}$$

$$M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 9 & -13 & -36 \\ -4 & 8 & 21 \end{pmatrix}$$

$$P(v_2) = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{6}{5} v_1 - \frac{13}{5} v_2 + \frac{8}{5} v_3$$

$$P(v_3) = P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 36 \\ -21 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{12}{5} v_1 - \frac{36}{5} v_2 + \frac{21}{5} v_3$$

$$P^2 = P$$

$$M^2 = M$$

$$I \cdot I = \frac{4 + 54 - 48}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = \mu_{11}$$

e così per tutti i prodotti righe $\times$ col.

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-\alpha = -\frac{2}{5} \quad -\beta = -\frac{9}{5}$$

$$p(x) = x - q(x)$$

$$q(x) = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 & 14 \\ 9 & 6 & 15 & 21 \\ -24 & -18 & -45 & -63 \\ 12 & 8 & 20 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = q(x)$$

$$-\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

5.2.12

$$V = \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$$

$$W = \text{span} \left(\underset{\substack{u \\ v_1}}{2 - t + t^3}, \underset{\substack{v \\ v_2}}{1 + t^2 - 4t^3} \right)$$

$$\tilde{Z} = \left\{ f \in V \mid \underline{f(1) + f'(1) = 0}, \underline{f(2) - 2f''(1) = 0} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \dim \mathcal{L}_1 & & \dim \mathcal{Z} \\
 V & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 \\
 \downarrow & & \\
 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} f(1) + f'(-1) \\ f(2) - 2f''(1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2
 \end{array}
 \quad \text{is linear}$$

$$\mathcal{Z} = \ker \varphi$$

$$\dim \mathcal{Z} \cap W = ?$$

$$\dim \ker \varphi \cap W$$

$\mathcal{Z} \in W$ zero in some direction?

$$\text{restriction } \varphi \in W \quad \varphi|_W : W \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Calcoliamo

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = \begin{pmatrix} -16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

due vettori di $\mathbb{R}^2$
lin. indep.

$$\dim \operatorname{Im} \varphi|_W = 2$$

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi|_W = 2 - 2 = 0$$

$$\underbrace{\quad}_{\downarrow}$$

$$\operatorname{Ker} \varphi \cap W$$

$$\dim(Z \cap W) = 0$$

$$\dim Z = 4 - 2 = 2$$

$$\dim W = 2 \quad \Rightarrow \dim(W + Z) = 4$$

$$\dim W \cap Z = 0 \quad \Rightarrow V = W \oplus Z$$

$$f(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3$$

$$f(t) = p(f(t)) + q(f(t))$$

$\uparrow$
projet. sur W

$\uparrow$
projet. sur Z

$$f(t) = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}_{\substack{\cap \\ W}} + \underbrace{\varphi(f(t))}_{\substack{\cap \\ Z}}$$

voglio calcolare
 λ_1, λ_2 in funt.
 di $f(t)$

$$f(t) - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 = \varphi(f(t)) \in \dot{Z}$$

$$\varphi(f(t) - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2) = 0$$

$$\text{base di } V = B = \{1, t, t^2, t^3\}$$

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad \varphi(t^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t^3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} (t)_{t=1} + (t)'_{t=-1} \\ (t)_{t=2} - 2(t)''_{t=1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1 \\ 2 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(f(t)) = \varphi(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) =$$

$$= a_0 \varphi(1) + a_1 \varphi(t) + a_2 \varphi(t^2) + a_3 \varphi(t^3) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 + 2a_1 - a_2 + 4a_3 \\ a_0 + 2a_1 + 0 - 4a_3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(f(t)) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2).$$

$$\begin{pmatrix} q_0 + 2q_1 & -q_2 + 4q_3 \\ q_0 + 2q_1 & -4q_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

we also calculate λ_1, λ_2

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{17(q_0 + 2q_1 - q_2 + 4q_3) + 16(q_0 + 2q_1 - 4q_3)}{4(17 - 16)} \\ &= \frac{33q_0 + 66q_1 - 17q_2 + 4q_3}{4} \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \frac{2a_0 + 4a_1 - a_2}{1}$$

$$p(f(t)) = \lambda_1 (2 - t + t^3) + \lambda_2 (1 + t^2 - 4t^3)$$

$$\text{Basis of } Z = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ v_3}}{(2-t)}, \underset{\substack{\uparrow \\ v_4}}{(4+8t^2+t^3)} \right\}$$

$$p(v_1) = v_1$$

$$q(v_1) = 0$$

$$p(v_2) = v_2$$

$$q(v_2) = 0$$

$$p(v_3) = 0$$

$$q(v_3) = v_3$$

$$p(v_4) = 0$$

$$q(v_4) = v_4$$

Rispetto alle basi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathcal{E}$

$$[P]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P \quad P^2 = P$$

$$[q]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = N \quad N^2 = N$$

$$M + N = I_4$$

$$M \cdot N = 0$$

5.31 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$A \cdot I_n = A$$

già visto a les

$$I_m \cdot A = A$$

$$\underbrace{I_m \cdot A}_{m \times n}$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

i j

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i j

ma questo vale
per qualsiasi i, j
 $\Rightarrow I_m \cdot A = A$