

Alg Lim 13/10/2015

$$Es \quad V = \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$$

$$W = \{ f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) : f \text{ è continua} \}$$

1. $0 \in W$ perché 0 è continua

$$2+3. \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, f_1, f_2 \in W \stackrel{?}{\implies} \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in W$$

f_1, f_2 sono funzioni continue

$\implies \lambda_1 f_1$ è continua, $\lambda_2 f_2$ è continua

la somma di funz. continue è continua

$\Rightarrow \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ è continua, cioè $\in W$ ✓

$$Es \quad V = \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$$

$$W = \left\{ f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) : f\left(\frac{1}{12}\right) - 4f\left(\frac{3}{7}\right) = 1 \right\}$$

$f\left(\frac{1}{12}\right) - 4f\left(\frac{3}{7}\right) - 1$ è
polinomio nei valori di f
grado 1
costante
grado 0

$0 \notin W \Rightarrow W$ non è sottospazio di V

Fissiamo V sp. vett. su $\mathbb{R}$ qualsiasi

Prop f.e. dato $S \subset V$ esiste uno e un solo sottospazio W di V che è il più piccolo che contiene S .

1. W è un sottospazio di V
2. $W \supset S$
3. Dato Z ssp di V , t.c. $Z \supset S$ si ha $Z \supset W$.

(Notazione: $A \supset B$ è vero anche se $A = B$, altrimenti posso scrivere $A \supsetneq B$ per escludere $A = B$).

Def dati $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $v_1, \dots, v_k \in V$
chiamo combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$ con coeff
 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ l'espressione

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

e anche il suo risultato

$$\underline{E_S} \quad \sqrt{3} \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} -e \\ 41 \end{pmatrix} \quad \text{è la comb.}$$

$$\text{lin. di } \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e \\ 41 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ con coeff}$$

$$\sqrt{3}, 5, -12 \quad \text{Vale}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} + 35 + 12e \\ \sqrt{3} \cdot \pi + 5\sqrt{3} - 492 \end{pmatrix}$$

Dim (Prop.) affermo che un W come cercato è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di elementi di S cioè :

$$W = \left\{ \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k : k \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, s_1, \dots, s_k \in S \right\}$$

Dico che W soddisfa 1, 2, 3 -

(L'unicità di W segue facilmente: dopo) -

Devo verificare:

1. W è sottospazio

• $0 \in W$; meno $s \in S$ generatori (se $S = \emptyset$ poco interessante)

$$0 \cdot s = 0 \in W$$

• presi $w, w' \in W$, presi $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ verifico che

$$\underline{\lambda w + \lambda' w' \in W}$$

so che $w = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$ $s_i, s'_i \in S$

$$w' = \lambda'_1 s'_1 + \dots + \lambda'_{k'} s'_{k'}$$

$$\Rightarrow \lambda w + \lambda' w' = \underbrace{\lambda w}_{= \lambda w} + \underbrace{\lambda' w'}_{= \lambda' w'} \\ = (\lambda \lambda_1) s_1 + \dots + (\lambda \lambda_k) s_k + (\lambda' \lambda'_1) s'_1 + \dots + (\lambda' \lambda'_{k'}) s'_{k'}$$

è comb. lin di elementi di S

$\Rightarrow \text{OK}$

$$2. \quad W \supset S$$

$$\text{Se } s \in S$$

$$\underbrace{1 \cdot s = s}_{\text{è combinazione lineare di el. di } S, \kappa=1, \lambda_1=1, s_1=s}$$

è combinazione lineare di el.
di S , $\kappa=1$, $\lambda_1=1$, $s_1=s$

3. Se Z è sottosp. e $Z \supset S$ allora $Z \supset W$:

Voglio mostrare che tutti: $w \in W$ stanno in Z

$$\text{Sia } w \in W, \quad w = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n, \quad s_i \in S.$$

$$\text{Ora } Z \supset S \ni s_i \Rightarrow s_i \in Z$$

ma Z è sottospazio

$$s_1, s_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \in \mathbb{Z}, s_3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) + \lambda_3 s_3 \in \mathbb{Z}$$

perindi un passo alla volta procedo e Anso

$$w = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k \in \mathbb{Z} \quad -$$

Unicità di W : supponiamo di avere W_1, W_2 che

soddisfano 1, 2, 3

1. W_j è sottospazio

2. $W_j \supset S$

3. Se Z è sp. e $Z \supset S \Rightarrow Z \supset W_j$

} per $j=1, j=2$

Uniamo le prop 3 di W_1 con $Z = W_2$
(questo lo possiamo fare perché 1 e 2 di W_2 dicono
 W_2 è ssp e $W_2 \supset S$) : Troviamo che $W_2 \supset W_1$.
Posso ripetere lo stesso ragionamento scambiando W_1 e W_2
e trovo $W_1 \supset W_2$

$$\Rightarrow W_1 = W_2 \quad \square$$

Def. Chiamo spazio generato da S , o indico con
 $\text{Span}(S)$, il sotto-spazio W della proposizione
(cioè il più piccolo ssp che contiene S , cioè l'insieme

delle comb. lineari di el. di S) -

Oss

Se $S = \emptyset$

$\text{Span}(\emptyset) = \{0\}$ (sottospazio "banale",
l'altro sottosp. banale è V)

Ricordate $\emptyset$ non è sp. vettoriale: ci deve
essere sempre almeno lo 0 -

oss

attenzione: S in generale è un sottoinsieme
(non un ssp.)!

Se W è un ssp di V allora $\text{Span}(W) = W$

Def $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_k\})$ lo indico con

$\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ ed è

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \quad ; \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Sappiamo per def. che $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è l'insieme di tutte le comb. lineari di vettori di $\{v_1, \dots, v_k\}$ (anche ripetuti): tutte si riducono a $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ raccogliendo i coefficienti dei v_i ripetuti e mettendo coeff. 0 ai v_j che non compaiono.

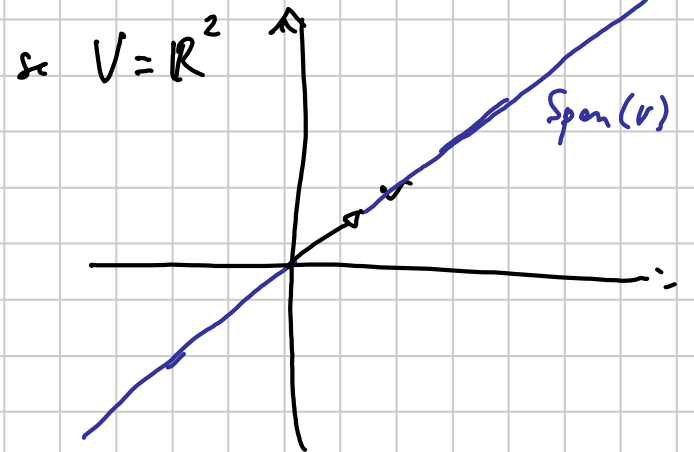
ES $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= (3+7) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (5-4) \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

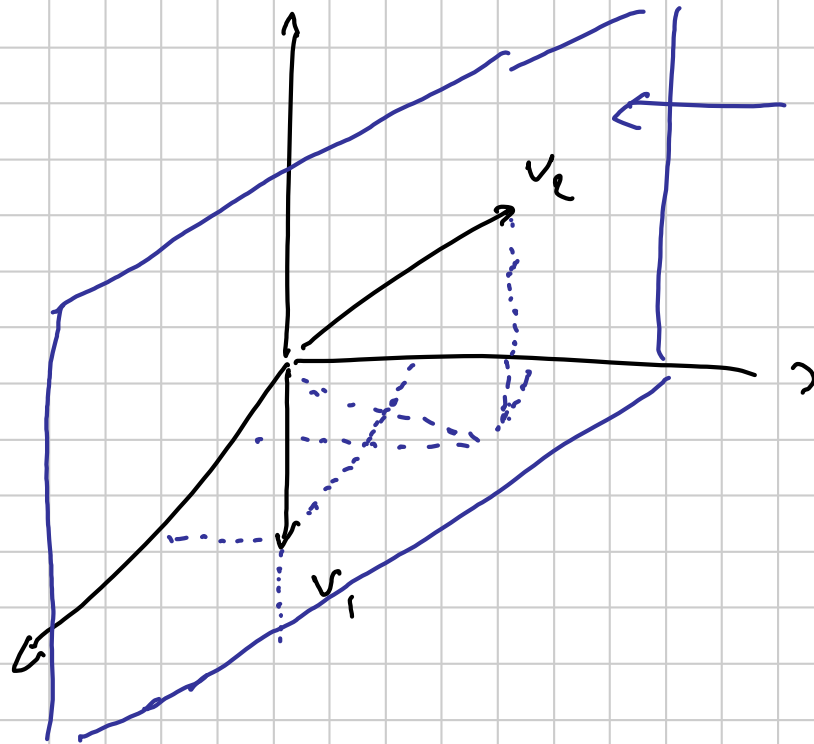
ES V sp. vert. generati, $v \in V$ $v \neq 0$

$$\text{Span}(v) = \{ \lambda \cdot v : \lambda \in \mathbb{R} \}$$



$$V = \mathbb{R}^3, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Span}(v_1, v_2) = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$



$\text{Span}(v_1, v_2)$ è il piano
che contiene v_1, v_2
(notare che ho disegnato
 v_1, v_2 non sulla stessa
retta)

Visib $\text{Span}(v_1, \dots, v_n) =$ l'insieme delle comb. line.
di $v_1, \dots, v_n$

Q: $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ so che esiste un'espressione
 $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = v$: è unica?

Q₀: so che $0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ e ha espressione
 $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$; esistono altre
espressioni per 0 come comb lineare?

Risposta: a volte Sì, a volte NO, ma la risposta
è la stessa per Q e per Q₀.

Es (ssp / non ssp) $V = \mathbb{R}[t]$

• dato $d > 0$ intero, considero

$$\mathbb{R}_{=d}[t] = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) = d \}$$

$$0 \stackrel{?}{\in} \mathbb{R}_{=d}[t]$$

NO : $\deg 0$ non è d
(non è definito)

• $\{0\} \cup \mathbb{R}_{=d}[t] : \text{ssp?}$

$$\cdot 0 \in \quad \underline{\text{Sì}}$$

• la somma di due polinomi di grado d ha grado d ?

NO es. $d = 3$

$$(7 - 3t + 2t^2 - \underline{18t^3}) + (\sqrt{2} + t - 4t^2 + \underline{18t^3})$$

non ha grado 3

si cancellano, resta
un polin di grado 2.

$$\bullet \mathbb{R}_{\leq d}[t] = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(p(t)) \leq d \} \ni 0$$

è un sottospazio.

$$\in \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$$

$$\bullet \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \overbrace{p(-2) = 0}^{\text{soluzione di } p(t) \text{ per } t = -2} \} = W \text{ è ssp?}$$

• $0 \in \dots$ ✓

• Se $p(t) \in W$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \quad (\text{somme finite, perché } p(t) \text{ è finito})$$

$$p(-2) = 0 \iff \underline{a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + \dots = 0}$$

espr. "buona" = polinomio analog.
di grado 1 nei coeff. di $p(t)$

$\Rightarrow W$ è ssp.

Oss $Z, W \subset V$ sottospazi $\Rightarrow Z \cap W$ è sottospazio

$$(0 \in Z, 0 \in W \Rightarrow 0 \in Z \cap W)$$

$$\text{Se } v_1, v_2 \in Z \cap W, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

$$\left. \begin{array}{l} v_1, v_2 \in Z \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in Z \\ v_1, v_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in Z \cap W$$

$$\cdot \{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[t] : p(\sqrt{3}) = 0, p(-71) = 0 \} = W$$

è $\cap$ di 3 sottospori di $\mathbb{R}[t]$

$$\left(\mathbb{R}_{\leq 1}[t], \{ p \in \mathbb{R}[t] : p(\sqrt{3}) = 0 \}, \{ p \in \mathbb{R}[t] : p(-71) = 0 \} \right)$$

$$\Rightarrow W \text{ è s.s.p.}$$

Def Se $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ definito

$$p'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad (\text{derivata di } p(t))$$

$$\cdot \left\{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : p'(-3) = 0 \right\}$$

$$\text{Se } p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$p'(-3) = 0 \iff a_1 - 6a_2 + 27a_3 - 108a_4 + \dots = 0$$

espressioni "buone"

$\Rightarrow$ è SSP

$$\cdot \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : p'(2) + 5 p''(-3) = 0, \underline{p'''(7) = 0} \}$$

$\bar{e}$ ssp.

(derivata quarta)

$$\cdot \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \underline{3t^2 p'(t) + 5p(t) + p(1) = 0} \}$$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

uguaglianze
tra polinomi

||

uguaglianza di tutti
i coefficienti

$$\begin{aligned} & 3t^2 (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots) + \\ & + 5(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) + \\ & + (a_0 + a_1 + a_2 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots = 0 \\ 5a_1 = 0 \\ 3a_1 + 5a_2 = 0 \\ 6a_2 + 5a_3 = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \vec{e}$ ssp. (in realtà è $\{0\}$)