

Alg. Lin 11/11/2015

VEN. 13 NOV. 8.30 - 10.30 $\widehat{F2}$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

a I_n è associata

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

OSF $\dim V = n$

B una qualsiasi base di V

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$[\text{Id}_V]_B^B = I_n$$

perché $\text{Id}_V(v_j) = v_j = 0v_1 + \dots + 0v_{j-1} + 1 \cdot v_j + 0v_{j+1} + \dots + 0v_n$

$\Rightarrow$ j -esima colonna di $[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}_j$

Attenzione $[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ($\mathcal{B}' \neq \mathcal{B}$)
non è I_n

Def dico che una matrice è invertibile se lo è
l'applicazione lineare associata. Cioè

• $A \in M_{m \times n}$ può essere invertibile solo se $m=n$
(matrice quadrata)

• $A \in M_{n \times n}$ è invertibile se $\exists B$ t.c.
 $B \cdot A = \underline{A \cdot B} = I_n$ Pongo $B = A^{-1}$

OSS Se $B \cdot A = I_n$ ($A, B \in M_{n \times n}$)

allora A è invertibile

$$B \cdot A \cdot A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

$$B \cdot I_n = B \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1}$$

Analogamente $A \cdot B = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$

Cioè "l'inversa da uno dei due lati di A
matrice quadrata è automaticamente l'inversa"

Attenzione esistono $A \in M_{n \times n}$, $B \in M_{n \times m} \subset \mathbb{C}$.

$$A \cdot B = I_m \quad \text{ma} \quad m \neq n$$

($\Rightarrow$ A, B non sono invertibili)

Q: Come cambiano $[v]_B$ o $[f]_B^C$
cambiando B o $B \subset \mathbb{C}$?

Def chiamo matrice di cambio di base da

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \text{a} \quad B' = \{v'_1, \dots, v'_n\} \quad \text{le}$$

matrice M $\uparrow$ c.

$$(*) \quad v'_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} v_i \quad M = (m_{ij})$$

$$\text{cioè} \quad M = [Id_V]_{B'}^B$$

oss se usiamo le regole del prodotto righe per colonne
possiamo scrivere

$$v'_j = (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}$$

← colonne
j-esime di M

non sono numeri, ma vettori
ma ha comunque senso

$$(v'_1, \dots, v'_n) = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B' = B \cdot M$$

def. sintetica della
matrice di cambio di
base da B a B'

Se $V = \mathbb{R}^n$ è un'identità

tra matrici $n \times n$

Prop se M è la matrice di cambio di base da B a B'

allora M è invertibile e M^{-1} è la matrice di cambio di base da B' a B

Dim Sia X la matrice di cambio di base da B' a B

ho: $B' = B \cdot M$

$B = B' \cdot X$

$\Rightarrow B = B (M \cdot X)$ dunque $M \cdot X$ è la matrice di cambio di base da B a B

$\Rightarrow M \cdot X = I_n$ - Analogamente

$X \cdot M = I_n$

Ricordiamo $[v]_B$ è quel vettore di $\mathbb{R}^n$ t.c.

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$v = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se $V = \mathbb{R}^n$ allora
le formule è un'identità!
tre matrici

$$n \times 1 = (n \times n)(n \times 1)$$

ovvero $v = B \cdot x$. Dunque posso dare la def.:

Def $[v]_B$ è quel vettore di $\mathbb{R}^n$ (unico) t.c.

$$v = B [v]_B$$

Prop Se M è la matrice di cambio di base
da B a B' allora $[v]_{B'} = M^{-1} [v]_B$

Dim $B' = B \cdot M$

$B = B' \cdot M^{-1}$

$[v] = B \cdot [v]_B =$

$= (B' \cdot M^{-1}) [v]_B =$

$= B' (M^{-1} \cdot [v]_B)$

$\Rightarrow [v]_{B'} = M^{-1} \cdot [v]_B$

□

ES $B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

$B' = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad v = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{29}{17}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \boxed{\frac{-16}{17}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 29/17 \\ -16/17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{-13} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \boxed{-41} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -13 \\ -41 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \Pi$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \Pi^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{-11} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \boxed{-29} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{-4} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \boxed{-9} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & -4 \\ -29 & -9 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che $[v]_{B'} = T^{-1} [v]_B$

$$\begin{pmatrix} -11 & -4 \\ -23 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29/17 \\ -16/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -91 \end{pmatrix} \quad \underline{OK}$$

Ricordiamo la matrice $[I]_B^{\mathcal{C}}$ $B = \{v_1, \dots, v_n\}$
 $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$

è quella $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$I(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Come prima riscriviamo come

$$f(v_j) = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

← colonne j -esima di A

$$(f(v_1), \dots, f(v_n)) = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ f \cdot \end{matrix} \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\mathcal{B}}$$

"nuova"

$\parallel$
 A

operazione : applico f a ciascun vettore $v_1, \dots, v_n$

Cioè def. sintattica $[f]_B^{\mathcal{C}}$: è quella matrice
 t.c. $f \cdot B = \mathcal{C} \cdot [f]_B^{\mathcal{C}}$ muove def. di $[f]_B^{\mathcal{C}}$

Prop Se M è la matrice di cambio di base da B a B'
 e N è la matrice di cambio di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$

ho $[f]_{B'}^{\mathcal{C}'} = N^{-1} [f]_B^{\mathcal{C}} \cdot M$

Dim $B' = B \cdot M \quad \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cdot N \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}' \cdot N^{-1}$

$$J \cdot B = \mathcal{E} [J]_B^{\mathcal{E}}$$

ove :

$$J \cdot B' = J \cdot B \cdot H = \mathcal{E} [J]_B^{\mathcal{E}} \cdot H = \mathcal{E}' \underbrace{\left(N^{-1} [J]_B^{\mathcal{E}} H \right)}_{[J]_{B'}^{\mathcal{E}'}} \quad \square$$

CONCLUSIO

megli non usare le formule
 invece usare le def di $[\cdot]_B$
 o def di $[\cdot]_B^{\mathcal{E}}$ e ragionare sulle
 domande -