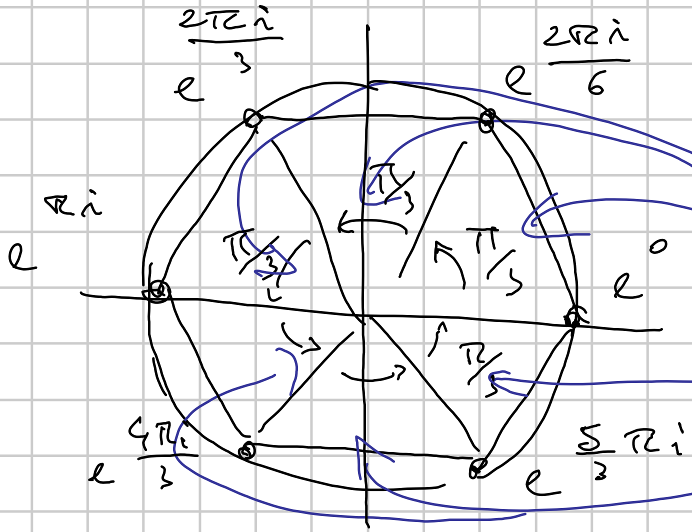
Alg Lin. 9/12/2015

Equazione in $\mathbb{C}$

$$\boxed{z^n = 1}$$

soluzioni $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ $k = 0, \dots, n-1$ (n soluzioni distinte)



es $n = 6$

Ampi. angoli di $\frac{2\pi}{6}$

Caso generale $\boxed{z^n = \alpha}$ $(\alpha \neq 0)$ $n \in \mathbb{Z}$

stesso metodo. Se $\alpha = \eta \cdot e^{i\varphi}$, e pongo

$z = \rho e^{i\vartheta}$ e otteniamo:

$$\boxed{\rho^n e^{in\vartheta} = \eta \cdot e^{i\varphi}}$$

Posso uguagliare modulo e argomento

$$\begin{cases} \rho^n = \eta \\ n\vartheta = \varphi + 2k\pi \end{cases}$$

$\leftarrow$ uguaglianza tra num. reali ≥ 0

$k \in \mathbb{Z}$

quindi :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

quante soluz. distinte? $\underline{\underline{n}}$

$\underline{k = 0, 1, \ldots, n-1}$ e poi mi fermo: tutte le altre soluz. che trovo differiscono per un multiplo intero di 2π da una soluz. già trovata.

Dunque $z^n = \alpha$ ha n soluz. <u>distinte</u> (per $\alpha = 0$ ho una sola radice con molteplicità n)

Teo (fondamentale dell'algebra - difficile)

Ogni polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ di grado $n > 0$ ammette delle radici (cioè delle soluz. di $p(z) = 0$).

OSS aggiungendo a $\mathbb{R}$ la radice di $x^2+1=0$ abbiamo aggiunto le radici di qualsiasi polinomio.

In realtà $p(z)$ di grado n ha esattamente n radici contate con molteplicità.

Fatto: anche in $\mathbb{C}[z]$ c'è la divisione: dati $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$, $g(z) \neq 0$ esistono unici $q(z)$ e $r(z) \in \mathbb{C}[z]$ t.c.

$$\begin{cases} f(z) = g(z) \cdot q(z) + r(z) \\ r(z) = 0 \quad \text{oppure} \quad \deg(r(z)) < \deg(g(z)) \end{cases}$$

(Dim: uguale a $\mathbb{R}[x]$)

Corollario (Teorema di Ruffini)

$z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice di $p(z) \Longleftrightarrow p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)$

<u>Dim</u> divido $p(z)$ per $(z - z_0)$ di grado $= 1$

$$p(z) = (z - z_0)\, q(z) + r(z)$$

$$\deg(r(z)) < \deg(z - z_0) = 1 \implies r(z) = r \in \mathbb{C}$$

Ho $p(z) = (z - z_0)\, q(z) + r$;

sostituisco $z = z_0$

$$p(z_0) = \overbrace{(z_0 - z_0)}^{= 0}\, q(z_0) + r = r$$

Dunque z_0 è radice di $p(z) \iff r = 0$

$\Longleftrightarrow (z-z_0)$ divide $p(z)$ ∎

Molteplicità di una radice

Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, sia z_0 radice di $p(z)$

$$p(z) = (z-z_0)\, q_1(z) \; ; \; q_1(z_0) \begin{cases} \neq 0 & \text{molt. di } z_0 = 1 \\ = 0 & q_1(z) = (z-z_0)\, q_2(z) \end{cases}$$

$$p(z) = (z-z_0)^2\, q_2(z) \; ; \; q_2(z_0) \begin{cases} \neq 0 & \text{molt di } z_0 = 2 \\ = 0 & q_2(z) = (z-z_0) \cdot q_3(z) \end{cases}$$

$p(z) = (z - z_0)^3 q_3(z)$ . . .

$\deg(q_i(z)) = n - i \Rightarrow$ a un certo punto necessariamente finisco.

al più tardi per $i = n$.

Cioè la molteplicità di z_0 come radice di $p(z)$ è

è il massimo intero K t.c.

$(z - z_0)^k$ divide $p(z)$; ovvero la molteplicità è m

se $p(z) = (z - z_0)^m q(z)$ e $q(z_0) \neq 0$

NO ~~la molt. di z_0 è il numero di volte in cui z_0 è radice di $p(z)$~~

Prop (assumendo il Teo fond. dell'algebra)
un polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ di grado n ha esattamente n radici contate con le molteplicità.

DIM Esiste z_1 radice con molteplicità $m_1 \geq 1$

$$\Rightarrow \quad p(z) = (z - z_1)^{m_1} p_1(z) \qquad \deg(p_1(z)) = \begin{cases} 0 & \text{finito} \\ > 0 & \text{ha radice } z_2 \neq z_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p(z) = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \; p_2(z)$$

Procedendo così alla fine ottengo

$$\boxed{p(z) = \alpha (z - z_1)^{m_1} \cdot (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_k)^{m_k}} \qquad \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0$$

e ha radici $z_1, \dots, z_k$ con molteplicità $m_1, \dots, m_k$

e $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$

$\square$

Spazi vettoriali su $\mathbb{C}$: la def. è come su $\mathbb{R}$

e valgono tutti i teoremi / costruzioni ...

perché trattando gli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali abbiamo usato solo il fatto che $\mathbb{R}$ è un campo.

<u>Def</u> V $\mathbb{C}$-sp. vett. se ho

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad \cdot : \mathbb{C} \times V \longrightarrow V$$

che soddisfano (1-8) identiche a quelle date su $\mathbb{R}$.

TUTTO VALE ALLO STESSO MODO: esempio

$$W = \left\{ z \in \mathbb{C}^4 : \begin{array}{l} (1+i) z_1 - z_2 + 2i z_3 + 7 z_4 = 0 \\ 5i z_1 + (1-i) z_2 + i z_3 + (4-i) z_4 = 0 \end{array} \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{C}^4$ perché definito da equazioni lineari omogenee nelle coordinate.

$$\text{rank}\begin{pmatrix} 1+i & \boxed{-1} & \boxed{2i} & 7 \\ 5i & \boxed{1-i} & \boxed{i} & 4-i \end{pmatrix} = 2 \quad \text{perché} \quad \det\begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 1-i & i \end{pmatrix} \neq 0$$

$$-1 \cdot i - 2i(1-i) = -i - 2i - 2 = -2 - 3i \neq 0$$

$\Rightarrow$ W ha dimensione $4 - 2 = 2$

cioè ha una base con due elementi.

Per trovarla

$$z_2 = (1+i)z_1 + 2i z_3 + 7 z_4$$ e sostituisco nella II eq.

$$(5i + (1-i)(1+i))z_1 + (i + 2i(1-i))z_3 +$$

$$+ (4 - i + (1-i)7) z_4 = 0$$

allora trovo

$$\begin{cases} z_2 = \alpha z_1 + \beta z_4 \\ z_3 = \gamma z_1 + \delta z_4 \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

per v_1 sostituisco $z_1 = 1$, $z_4 = 0$,

per v_2 $z_1 = 0$, $z_4 = 1$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix}$$

cioè : ho trovato v_1, v_2 <u>lin. indip</u> :

gli unici $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ t.c. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$

e <u>generano</u> : ogni $v \in \mathbb{C}$ si scrive come

$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ —

<u>OSS</u> uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

<u>ES</u> $\mathbb{C}^2$ è sp. vett. su $\mathbb{C}$ e ne fare

$$(1-i)\cdot\begin{pmatrix}1+2i\\2-3i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+i\\-1-5i\end{pmatrix}$$

operazione di $\mathbb{C}^2$ come sp. vett. su $\mathbb{C}$,
ma NON come sp. vett su $\mathbb{R}$.

$$7\cdot\begin{pmatrix}4-i\\-3+5i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28-7i\\-21+35i\end{pmatrix}$$

operaz. di $\mathbb{C}^2$ come $\mathbb{C}$-sp. vett., ma ANCHE
come $\mathbb{R}$-sp. vett.

OSS $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = (-i)\begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix}$

pensati in $\mathbb{C}^2$ come sp. vetto. su $\mathbb{C}$ sono lin dip.

pensati in $\mathbb{C}^2$ come sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ sono lin indip.

OSS $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-sp. vett. è $\mathbb{R}^2$

in generale $\mathbb{C}^n$ come $\mathbb{R}$-sp. vett è $\mathbb{R}^{2n}$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$ $\left(\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n\right)$

Prop Se V è sp. vett. su $\mathbb{C}$ ($\Rightarrow$ anche su $\mathbb{R}$)

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(V)$$

Dim Se $v_1, \dots, v_n$ è una $\mathbb{C}$-base di V allora

$v_1, iv_1, v_2, iv_2, \dots, v_n, iv_n$ è una $\mathbb{R}$-base di V. $\square$

ES base di $\mathbb{C}^1$ su $\mathbb{C}$ $\{1\}$

base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$ $\{1, i\}$

base standard di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}$ è

$e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}$, trovo come base

in $\mathbb{R}$ di $\mathbb{C}^n$

$e_1^{(n)}, i e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, i e_2^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}, i e_n^{(n)}$

ESERCIZI 7.2.1

$n=2$ $\quad E: 4x+5y=3$ cerco eq parametriche.

$E = v + W$ $\quad W: 4x+5y=0$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$ $\leftarrow$ genera W, dim $W = 1$

$\Rightarrow$ ho base

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 4\alpha = 3 \qquad \alpha = \frac{3}{4}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7.2.2

$$E = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eq. param. per $W = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

$W = \{ 5x + 6y = 0 \}$

$5x + 6y$ lo calcolo per $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E : 5x + 6y = 41$

7.2.3

$n = 3$

$E : \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 7 \\ 5x + y + 6z = -9 \end{cases}$

$E = v + W$ $\quad \dim W = 1$ $\quad \left(\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = -13 \neq 0 \right)$

base di W ?

$w_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$x_0 = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 20$$

$$y_0 = -\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -22$$

$$z_0 = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = -13$$

$$w_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ -22 \\ -13 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{è base di } W$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad \text{pongo } \underline{z_1 = 0} \text{ e risolvo}$$

perché det I°, II° col è $\neq 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3y_1 = 7 \\ 5x_1 + y_1 = -8 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}}{-13} = -\frac{34}{13}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}}{-13} = +\frac{53}{13}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = -13 \neq 0$$

Formule di Cramer

$$\Xi = \begin{pmatrix} -34/13 \\ 53/13 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 20 \\ -22 \\ -13 \end{pmatrix}$$

7.2.4

$$E = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} 3x + 6y = 0 \\ 4x - 6z = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$E = \begin{cases} 3x + 6y = 3 \cdot 5 + 6(-2) = 3 \\ 4x - 6z = 4 \cdot 5 - 6(1) = 14 \end{cases}$$

7.2.5

$n = 3 \qquad E : 8x + 9y - 6z = 5$

$\dim W = 2$ cerco base

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$ indip. e generano W

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 8\alpha = 5 \qquad \alpha = \frac{5}{8}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$$

<u>7.2.6</u> $\qquad n = 3 \qquad E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$W = \left\{ x \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

$$-22x + 2y + 30z = 0$$

$$-22\cdot(2)+2(-1)+30(1)=-16$$

$$E: -22x+2y+30z=-16$$

7.2.7 $\quad n=4 \quad E=\begin{cases} 4x-y+2z-5w=0 \\ 3x+2y+z+4w=0 \end{cases}$

$\det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$

cerco base di W ($\dim W = 2$)

pongo alternativamente $z=0$ oppure $w=0$

cioè cerco vettori della forma

$$w_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ 0 \end{pmatrix} = w_2$$

$$\begin{cases} 4a - b - 5c = 0 \\ 3a + 2b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$a = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$b = -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} 4d - e + 2f = 0 \\ 3d + 2e + f = 0 \end{cases}$$

$$d = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$e = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

e trovo w_1, w_2 base W —

<u>Devo cercare $v \in E$</u> $[\ldots]$

e ottengo $E = v + \mathrm{Span}(w_1, w_2)$