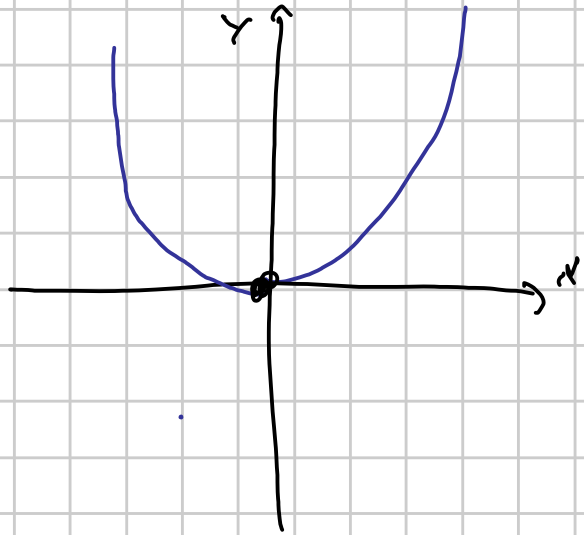
Alg Lin 7/10/2015

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0 \right\}$ NON È SSP. di $\mathbb{R}^2$

<u>ES</u> $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \right\}$



1. $0 \in W$ ✓

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W \overset{?}{\Rightarrow} \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$

NO perché $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ ma per $\lambda = 2$ $\quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W$

Esempi visti

$$\sum_i x_i = 0 \qquad \text{sì}$$

$$\longrightarrow \sum_i (\dots\dots)\, x_i = 0 \qquad \text{sì}$$

$$\sum_i (\dots\dots)\, x_i = 5 \qquad \text{NO}$$

$$x \cdot y = 0 \qquad \text{NO}$$

$$x^2 = y \qquad \text{NO}$$

Vanno bene (per definire un sottospazio) solo le equazioni polinomiali omogenee di grado 1 nelle componenti.

Quesito vero:

$S : \{ x \in \mathbb{R}^4 : e^{3x_1 - 8x_2} = 1 \}$ è SSPAZIO

non è polinomiale ma è
equivalente a $3x_1 - 8x_2 = 0$

es. $\{ x \in \mathbb{R}^n : \log(1 + 7x_3^{100}) = 0 \}$

equivalente a $x_3 = 0$

<u>Morale</u> vanno bene per definire sottospazi le equaz. polinomiali omogenee di grado 1 e tutte le equazioni ad esse equivalenti.

ES $\quad W = \{ A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \underbrace{7a_{11} - 5a_{13} + \sqrt{31}\, a_{22}}_{} = 0 \}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

espress. polinomiale omog. di grado 1 nei coeff. di A

Sottospazio?

1. $0 \overset{?}{\in} W$ sì

2+3. $A, B \in W \quad 7a_{11} - 5a_{13} + \sqrt{31}\, a_{22} = 0$

$$7b_{11} - 5b_{13} + \sqrt{31}\, b_{22} = 0$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda A + \mu B \in W$$

$$\underbrace{7(\lambda A + \mu B)_{11}} - \underbrace{5(\lambda A + \mu B)_{13}} + \underbrace{\sqrt{31}(\lambda A + \mu B)_{22}} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ 7(\lambda a_{11}+\mu b_{11}) & 5(\lambda a_{13}+\mu b_{13}) & \sqrt{31}(\lambda a_{22}+\mu b_{22}) \end{array}$$

$$\lambda(\underbrace{7a_{11}-5a_{13}+\sqrt{31}\,a_{22}}_{=0})+\mu(\underbrace{7b_{11}-5b_{13}+\sqrt{31}\,b_{22}}_{=0})=0$$

$\Rightarrow$ <u>OK</u>

<u>Es</u> $\{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \underbrace{a_{11}\cdot a_{12}^3 + a_{21}^4\cdot a_{22} = 0}\} = W$

non è del tipo "buono"

neanche mascherata

Non è un sottospazio

$$\underset{\lambda}{\underset{\shortparallel}{(-1)}}\underset{\substack{\cap \\ W}}{\underset{\substack{\shortparallel \\ w}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}} = \underset{\lambda \cdot w}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}} \notin W$$

$$(-1)\cdot(-1)^3 + (-1)^4 \cdot 1 = 2 \neq 0$$

controesempio alla 3.

Es $W := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{R}[t] : \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (1+2n^3)\, a_n = 0}_{\text{eq. buona } (= \text{pol. omog. di grado 1 nei coeff del polinomio, cioè } a_0, a_1, \dots)} \right\}$

È un sottospazio:

1. $0 \in W$ sì

2+3. $\quad p(t) = \sum a_n t^n \in W \quad$ cioè $\quad \sum_n (1+2n^3)\, a_n = 0$

$\quad\quad\; q(t) = \sum b_n t^n \in W \quad$ cioè $\quad \sum_n (1+2n^3)\, b_n = 0$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda p(t) + \mu q(t) \in W$$

cioè se $\lambda p(t) + \mu q(t) = \sum c_n t^n$ tale che

$$\sum (1+2n^3)\, c_n = 0 \quad ?$$

Ora $\underline{c_n = \lambda a_n + \mu b_n}$

$$\sum_n (1+2n^3)\, c_n = 0 \quad ?$$

$$\sum_n (1+2n^2)(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \overbrace{\sum_n (1+2n^3)\, a_n}^{0} + \mu \overbrace{\sum_n (1+2n^3)\, b_n}^{0} =$$

$= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$ <u>sì</u>

<u>OSS</u> tutte le Σ sono somme finite

perché tutti i coefficienti da un certo n in poi sono 0

le "solite" proprietà non valgono per somme infinite.

<u>ES</u> $\left\{ \sum a_n t^n \in \mathbb{R}[t] : \underbrace{a_0 + 5a_1^2 - 3a_{100}^3 = 0}_{} \right\}$

eqnaz nei coeff del polinomio né buona <u>né</u> <u>moscherata</u> (DEVO DARE UN CONTROESEMPIO)

$\Rightarrow$ Non è un sottospazio

$-5+t$

$a_0 = -5$

$a_1 = 1$

$a_n = 0 \quad n > 1$

$$\underset{a_0}{\overset{\shortparallel}{(-5)}} + 5\underset{a_1}{\overset{\shortparallel}{(1)}}^2 - 3\underset{a_{100}}{\overset{\shortparallel}{(0)}}^3 = 0$$

$$2 \cdot \underset{W}{\underset{\cap}{(-5+t)}} = -10+2t \notin W$$

$$(-10) + 5(2)^2 = 10 \neq 0$$

__Es__ $W = \{ f \in \mathcal{F}([0,1];\mathbb{R}) : \underbrace{5f(1/4) - 19f(1/2) = 0}_{} \}$

eq. polin. omog. di grado 1 in alcuni (numero finito) valori di f

W è sottospazio di $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$

1. $0 \in W$ <u>ok</u>

2+3. $f, g \in W$ cioè $5f(1/4) - 19f(1/2) = 0$

$5g(1/4) - 19g(1/2) = 0$

$\overset{?}{\Rightarrow} \lambda f + \mu g \in W$

equivale a $5\underbrace{(\lambda f + \mu g)(1/4)}_{\lambda f(\frac{1}{4}) + \mu g(\frac{1}{4})} - 19\underbrace{(\lambda f + \mu g)(\frac{1}{2})}_{\lambda f(\frac{1}{2}) + \mu g(1/2)} \overset{?}{=} 0$

$$\lambda\Big(\underbrace{5 f(1/4) - 19 f(1/2)}_{=\,0}\Big) + \mu\Big(\underbrace{5 g(1/4) - 19 g(1/2)}_{=\,0}\Big) = 0$$

$\Longrightarrow$ <u>OK</u>