

Alg Lim 6/10/2015

Es. (spazio vettoriale) $V = \mathbb{R}^n$

Es matrici $n \times m$ (n righe, m colonne) a coeff. reali

$$M_{n \times m}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} ; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\cong M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\pi & 7/8 \\ 5 & 4+e & 0 \end{pmatrix}$$

Operation

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

l'operazione
nuova che
definisco

"vecchia" somma
su $\mathbb{R}$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Devo dimostrare la
proprietà 1-8

Convenzione : se $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ indico con
 $(A)_{ij}$ il coeff. di A nella i -esima riga
 e j -esima colonna.

es

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$$

$(A)_{23} = 9$
 $(A)_{31} = 1$

Riscrivere la def:

$A, B \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ definisce $A + B \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$

come $(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$

operazione
che definisce

somma di
numeri reali

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

$$\lambda \cdot A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

$$(\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot (A)_{ij}$$

prodotto che
definisce

prodotto di
numeri reali

$$7. \quad \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

Sono entrambe matrici $n \times m$ e basta verificare
che sono uguali coeff. per coeff.

Posso (i, j) $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

Verifico:

$$(\lambda \cdot (\mu \cdot A))_{ij} = \lambda \cdot (\mu \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot (\mu \cdot (A)_{ij}) =$$

$$= ((\lambda \cdot \mu) \cdot (A)_{ij}) = ((\lambda \cdot \mu) \cdot A)_{ij}$$

OSS $\mathbb{R}^n = M_{n \times 1}(\mathbb{R})$

V sp. vett. $\kappa \quad + : V \times V \rightarrow V, \quad \cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ t.c.

1. $v + 0 = v$

5. $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

2. $\forall v \exists (-v) : v + (-v) = 0$

6. $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$

3. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$

7. $\lambda_1 (\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2) v$

4. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

8. $1 \cdot v = v$

Conseguenza delle proprietà:

$v + w = z + w \Rightarrow v = z$

$$\begin{aligned}
 \text{Inietti: } & v + w = z + w \stackrel{2}{\Rightarrow} (v + w) + (-w) = (z + w) + (-w) \Rightarrow \\
 & \stackrel{3}{\Rightarrow} v + (w + (-w)) = z + (w + (-w)) \stackrel{2}{\Rightarrow} \\
 & \Rightarrow v + 0 = z + 0 \stackrel{1}{\Rightarrow} v = z
 \end{aligned}$$

$$0 \cdot v = 0$$

$\uparrow$ numero 0 $\uparrow$ vettore 0

$$\begin{aligned}
 0 \cdot v &= (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \\
 &\Rightarrow 0 = 0 \cdot v
 \end{aligned}$$

$$(\text{annullatore}) \quad \lambda \cdot 0 = 0$$

Morale tutte le proprietà algebriche "regionali" valgono

Esempi vèto $\mathbb{R}^n$, $M_{n \times m}(\mathbb{R})$

- $\mathbb{R}[t]$ con $p(t) + q(t)$ somma tra polinomi
 $\lambda \cdot p(t)$ prodotto di numero $\times$ polinomio

proprietà 1-8 sono evidenti

$$3. \quad p(t) + (q(t) + r(t)) = (p(t) + q(t)) + r(t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

solo un numero
finito di coeff
 $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + (b_n + c_n)) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((a_n + b_n) + c_n) t^n$$

uguali per l'associatività su $\mathbb{R}$

• Sia S un insieme, considero

$$\mathcal{F}(S, \mathbb{R}) = \{ \text{le funzioni } S \rightarrow \mathbb{R} \}$$

Devo definire su $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ una struttura di sp. vett.

Dato $f_1, f_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ definisco

$f_1 + f_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ et, let: $\lambda \in \mathbb{R}, f : S \rightarrow \mathbb{R}$

la $\lambda \cdot f : S \rightarrow \mathbb{R}$; infame deux verifient la
propriete 1 - 3.

$f_1 + f_2$

par definition deux line

- domaine (S) ✓

- codomain ($\mathbb{R}$) ✓

- la legge de a ogni $s \in S$ associa un el. di $\mathbb{R}$:

$$(f_1 + f_2)(s) = f_1(s) + f_2(s)$$

↑
nuova operazione

↑
somma su $\mathbb{R}$

Per definire $\lambda \cdot f$ ha dominio (S) , codominio $(\mathbb{R})$

legge :

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

↑
oper. da
definire

↑
prodotto su $\mathbb{R}$

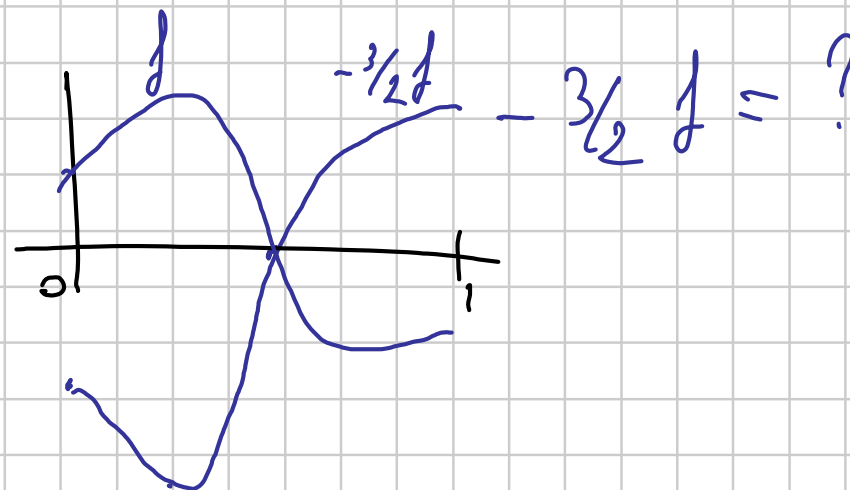
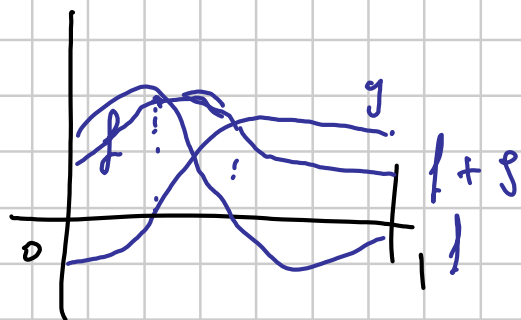
$$S = [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

grafico $\Gamma_f = \{(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]\}$

$f \longleftrightarrow$



⌈
⌋
"gamma"



Verifica le proprietà 1-8:

1. Definire $0 \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ tale che $0(s) = 0 \quad \forall s \in S$

$\uparrow$ $\uparrow$
 funzione numero
 che definisco

2 Date $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ definisco $(-f)(s) = -f(s)$

Prova che $f + (-f) = 0$

Perché 0 è la funz. che
vale sempre 0 . Quindi devo mostrare che $\forall s \in S$

$$(f + (-f))(s) = 0$$

$$(f + (-f))(s) = f(s) + (-f)(s) = f(s) - f(s) = 0$$

6. $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda f + \mu f$ per esercizio. ✓

Situazione generale : V sp. vett. su $\mathbb{R}$

Def Si chiama sottospazio vettoriale di V

un sottoinsieme $W \subset V$ t.c. :

1. $0 \in W$

2. $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

3. $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow \lambda \cdot w \in W$

facendo ^{in W} le operazioni
di spazio vett. di V
non usciamo da W

Conseguenza W è uno spazio vettoriale con le
operazioni "ereditate" da V .

Esempio

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} n = 3 \\ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \in V \right. \\ \left. \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} \in W \right) \right]$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. ✓

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

$$0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

2. $x, y \in W$

also

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0 = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$x + y \stackrel{?}{\in} W$$

$$\sum_{i=1}^n (x+y)_i \stackrel{?}{=} 0$$

$$\sum_{i=1}^n (x+y)_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i = 0 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$3. \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad x \in W \quad \sum x_i = 0$$

allora $(\lambda \cdot x) \stackrel{?}{\in} W$

$$\sum_{i=1}^n (\lambda \cdot x)_i = \sum_{i=1}^n \lambda \cdot x_i = \lambda \sum x_i = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow W$ è ssp vett. di V

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^n$ $W = \mathbb{Z}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i\}$

1. $0 \in W \quad \checkmark$

2. $x, y \in W \Rightarrow x+y \in W$

(perché la somma di due numeri interi è un intero)

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, x \in W \stackrel{?}{\Rightarrow} \lambda \cdot x \in W$ NO, infatti
 per esempio

$$\mathbb{R} \ni \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_W \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\cancel{W}}$

OSS se $\exists (\forall \lambda \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow \lambda w \in W)$ allora

non indichiamo 1. con.
 (1). $W \neq \emptyset$

infatti se $W \neq \emptyset \Rightarrow \exists w \in W \Rightarrow 0 \cdot w \in W \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 \in W$ cioè 1.

(in pratica conviene verificare la ①)

Es $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = \sqrt{2}\} = W \subset \mathbb{R}^n$

è un sottospazio? NO $0 \notin W$ $\sum_{i=1}^n 0 \neq \sqrt{2}$

Oss 2 & 3 possono essere "combinate" insieme:

(2+3). $w_1, w_2 \in W, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$

ESERCIZIO verificare che $2 \leq 3 \iff (2+3)$

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ intendo che prima faccio $\lambda_1 w_1$ e poi $(\lambda_1 w_1) + (\lambda_2 w_2)$ ~ $\lambda_2 w_2$

ESEMPIO $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (3i^4 - 5i + 2) x_i = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{0 \cdot x_1 + 40 x_2 + \dots}_{\text{somma per } i=1} = 0 \quad \uparrow \quad \text{per } i=2$$

Verifico che è un sottospazio

$$1. \quad 0 \in W \quad \text{OK}$$

$$2+3. \quad x, y \in W, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \sum (3i^4 - 5i + 2)x_i = 0 = \\ = \sum (3i^4 - 5i + 2)y_i = 0$$

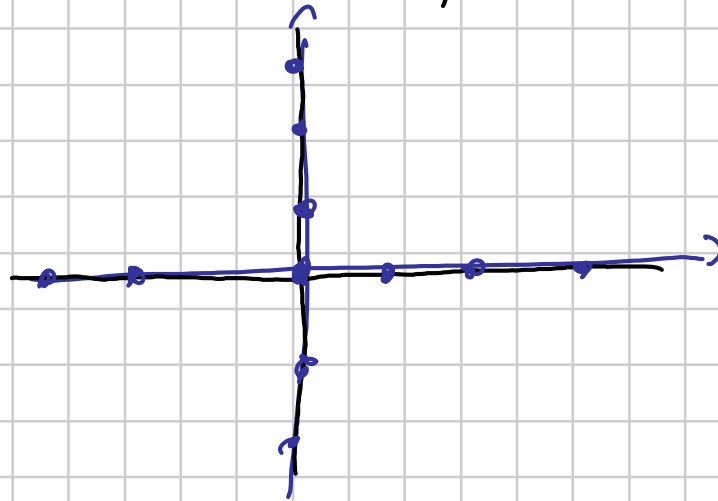
$$\lambda x + \mu y \stackrel{?}{\in} W$$

$$\sum_{i=1}^n (3i^4 - 5i + 2) (\underbrace{\lambda x + \mu y}_{"(\lambda x_i + \mu y_i)"})_i =$$

$$= \underbrace{\lambda \sum_{i=1}^n (3i^4 - 5i + 2)x_i}_{=0} + \underbrace{\mu \sum_{i=1}^n (3i^4 - 5i + 2)y_i}_{=0} = 0 \quad \underline{\text{OK}}$$

ESEMPIO $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0 \right\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^2$?

1. $0 \in W$



3. $\lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$

$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$?

$x \cdot y = 0$

$(\lambda \cdot x) \cdot (\lambda \cdot y) = 0$

$\lambda^2 x y = 0$

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in W \stackrel{?}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in W$ No perché

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\in \\ W}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\in \\ W}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$$

$\Rightarrow W$ non è sottospazio di $\mathbb{R}^2$

Esercizio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \right\}$ è sottosp.?