3/11/2015 Alg Lin

Come costruire applic. lineari?

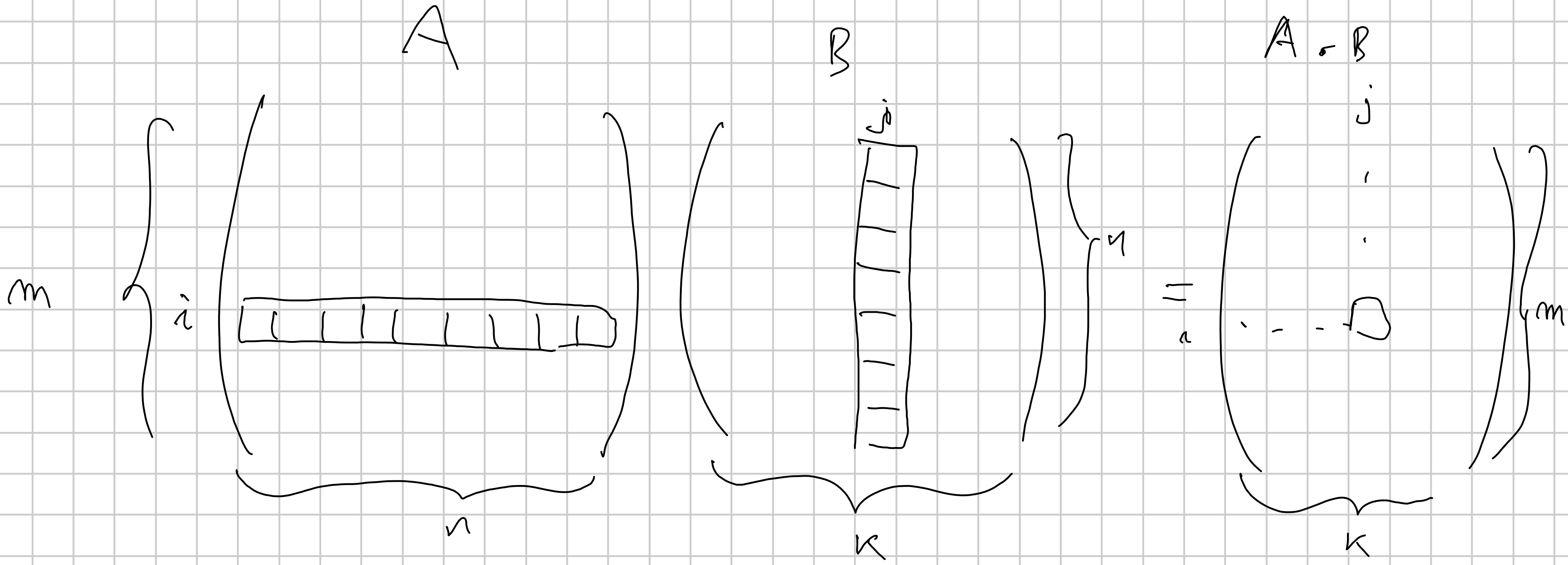
Def prodotto righe per colonne tra matrici:

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \qquad B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$

stesso indice

definisco $A\cdot B \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$ così

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{il}\,(B)_{lj}$$



<u>ES</u>

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -7 \\ 2 & 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & 25 & \square \\ 6 & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

$$2 \times 3 \qquad 3 \times 4 \qquad 2 \times 4$$

Caso particolare $A \in M_{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n = M_{n \times 1}$

$$A \cdot x \in M_{m \times 1} = \mathbb{R}^m$$

<u>Prop</u> il prodotto righe per colonne è lineare in ciascuno degli argomenti ed è associativo.

<u>DIM</u> 1) $A \cdot (\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2) = \lambda_1 \cdot A \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot A \cdot B_2$ lin dx

2) $$\underbrace{\underbrace{(\lambda_1 \underbrace{A_1}_{m \times n} + \lambda_2 \cdot \underbrace{A_2}_{m \times n})}_{m \times n} \cdot \underbrace{B}_{n \times k}}_{m \times k} = \underbrace{\lambda_1 \underbrace{\underbrace{A_1}_{m \times n} \underbrace{B}_{n \times k}}_{m \times k} + \lambda_2 \underbrace{\underbrace{A_2}_{m \times n} \underbrace{B}_{n \times k}}_{m \times k}}_{m \times k}$$ lin. sx

(dimostriamo solo 2) , 1) è analoga)

Sono matrici della stessa taglia ; quindi basta controllare che $\forall i,j$ ha lo stesso coeff. nel posto (i,j) –

$$((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)_{il} \cdot (B)_{lj} =$$

$$= \boxed{\sum_{l=1}^{n} (\lambda_1 (A_1)_{il} + \lambda_2 (A_2)_{il}) \cdot (B)_{lj}}$$

$$(\lambda_1 A_1 \cdot B + \lambda_2 A_2 \cdot B)_{ij} = \lambda_1 (A_1 B)_{ij} + \lambda_2 \cdot (A_2 B)_{ij} = \Big| =$$

$$= \boxed{\lambda_1 \cdot \sum_{l=1}^{n} (A_1)_{il} (B)_{lj} + \lambda_2 \sum_{l=1}^{n} (A_2)_{il} \cdot (B)_{lj}}$$

OK

Associativo :

$$\underbrace{A}_{m\times n}\cdot\underbrace{(\underbrace{B}_{n\times k}\cdot\underbrace{C}_{k\times h})}_{n\times h} \quad \text{ovvero} \quad \underbrace{A\cdot(B\cdot C)}_{m\times h} = \underbrace{(\underbrace{\underbrace{A}_{m\times n}\cdot\underbrace{B}_{n\times k}}_{m\times k})\cdot\underbrace{C}_{k\times h}}_{m\times h}$$

Verifico che hanno lo stesso coeff. in ogni posto

$$(A(B\cdot C))_{is} = \sum_{t=1}^{n}(A)_{it}\cdot(B\cdot C)_{ts} = \sum_{t=1}^{n}(A)_{it}\cdot\sum_{l=1}^{k}(B)_{tl}\cdot(C)_{ls}$$

$$((A\cdot B)C)_{is} = \sum_{l=1}^{k}(A\cdot B)_{il}(C)_{ls} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{t=1}^{n}(A)_{it}(B)_{tl}\cdot(C)_{ls}$$

Attenzione non è commutativo .

$$\underbrace{\underbrace{A}_{m\times n}\cdot\underbrace{B}_{n\times m}}_{m\times m} \overset{?}{=} \underbrace{\underbrace{B}_{n\times m}\cdot\underbrace{A}_{m\times n}}_{n\times n}$$

Se $n \neq m$ sono certamente diverse.

Se $m = n$ (tutte matrici quadrate) l'uguaglianza $A\cdot B = B\cdot A$ ha senso (stessa taglia) ma non vale in generale

<u>es</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 30 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 17 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Def data $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ pongo $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

data da $f_A(x) = A \cdot x$

OSS Grazie alle prop. f_A è lineare.

OSS la composizione di applicazioni lineari è lineare

OSS $f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}$

"il prodotto righe x colonne corrisponde alla composizione di applicazioni"

Infatti $A \in M_{m \times n}$ $B \in M_{n \times K}$ $\Rightarrow A \cdot B \in M_{m \times K}$

$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad f_B : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad f_{A\cdot B} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$, quindi

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^k \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend left, "f_A \circ f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_{A\cdot B}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \boxed{f_A \circ f_B = f_{A\cdot B}}$ è un'uguaglianza tra funzioni $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Cosa devo verificare? $\quad (f_A \circ f_B)(x) = f_{A\cdot B}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$

$$(f_A \circ f_B)(x) = f_A(f_B(x)) = A\cdot(Bx)$$

$$f_{A\cdot B}(x) = (AB)x$$

$$A\cdot(Bx) = (AB)x$$

ok: è per associatività

Grazie al fatto precedente conviene scrivere solo A invece che f_A, cioè identifichiamo $A \in M_{m \times n}$ con l'applicazione lineare $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Somme dirette

Def se $W, Z \subset V$ sono sottosp vett, diciamo che

V è somma diretta di W e Z

scriviamo $W \oplus Z = V$ se $V = W + Z$ e $W \cap Z = \{0\}$

(Ricorda: $W + Z = \mathrm{Span}(W \cup Z) = \{w + z \; ; \; w \in W, z \in Z\}$)

Prop $V = W \oplus Z \iff$ ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$\begin{array}{ccccc} v & = & w & + & z \\ & & \cap & & \cap \\ & & W & & Z \end{array}$$

Dim $V = W \oplus Z \Rightarrow \begin{cases} W + Z = V & \Rightarrow \text{ ogni } v \in V \text{ si scrive come} \\ & \quad v = w + z, \; w \in W, \; z \in Z \\ W \cap Z = \{0\} & \Rightarrow \text{ se } \quad v = w_1 + z_1 = w_2 + z_2 \end{cases}$

$$\underbrace{w_1 - w_2}_{\in W} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\in Z}$$

$\Rightarrow w_1 - w_2 = z_2 - z_1 \in W \cap Z = \{0\}$

$\Rightarrow w_1 = w_2 \quad , \quad z_1 = z_2$

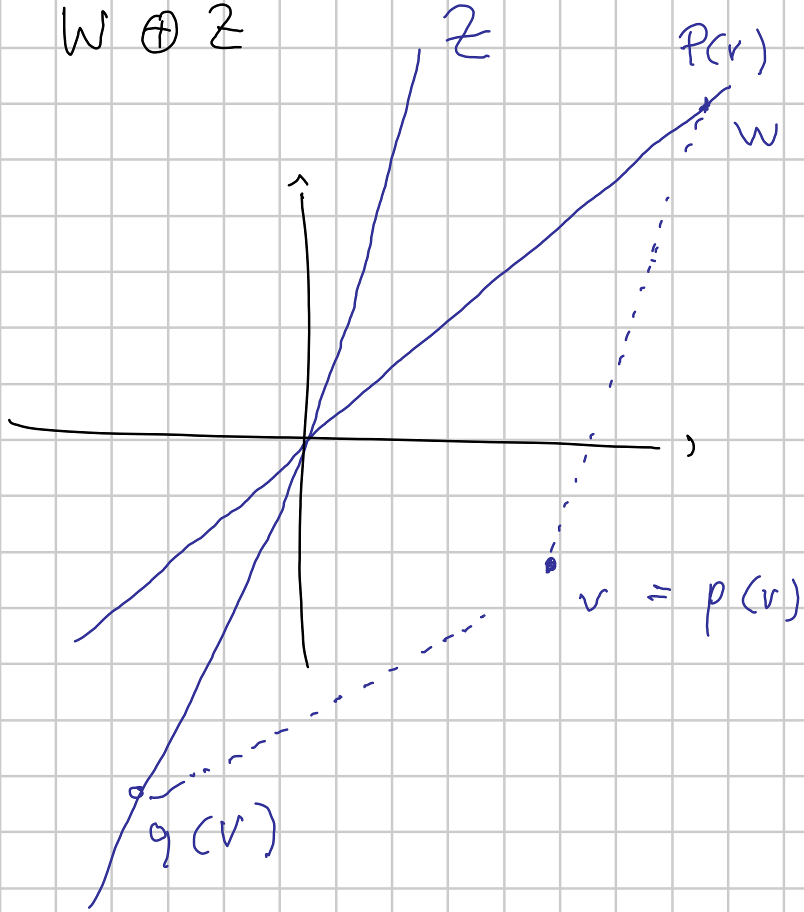
$\Leftarrow$: esercizio

Def Se $W \oplus Z = V$ definiamo le proiezioni su W e Z associate alla decomposizione $V = W \oplus Z$.

le mappe $p, q : V \to V$ dove se $v \in V$ e scrivo $\underset{\substack{\cap \\ W}}{v = w} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{z}$ $\quad p(v) := w \quad , \quad q(v) := z$.

__ES__

$V = \mathbb{R}^2 = W \oplus Z$



$v = p(v) + q(v)$

Prop p e q sono lineari. Inoltre:

1) $p \circ p = p$, $q \circ q = q$

2) $p \circ q = q \circ p = 0$

3) $p + q = Id_V$

4) $Ker(q) = Im(p) = W$, $Im(q) = Ker(p) = Z$

DIM Linearità Suppongo $p(v_1) = w_1$, $q(v_1) = z_1$

$p(v_2) = w_2$ $q(v_2) = z_2$

cioè $v_1 = w_1 + z_1$ $w_1, w_2 \in W$

$v_2 = w_2 + z_2$ $z_1, z_2 \in Z$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underbrace{(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)}_{\in W} + \underbrace{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}_{\in Z}$$

$$\Rightarrow p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 p(v_1) + \lambda_2 p(v_2)$$

$$\Rightarrow q(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1 q(v_1) + \lambda_2 q(v_2)$$

1) $p \circ p = p$ $\qquad p(v) = w \Rightarrow w \in W, \quad v = w + z, \quad \overline{\text{OK}}$ $z \in Z$

$$(p \circ p)(v) = p(w) \qquad w = \underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{0}_{\in Z}$$

$$\Rightarrow p(w) = w \qquad (p \circ p)(v) = p(v)$$

— Idem per $q \circ q = q$

2) $p \circ q = 0$ $\qquad q(v) = z$ $\qquad$ significa che $v = w + z$

$w \in W, \ z \in Z$

$p(q(v)) = p(z)$ $\qquad$ ma $z = \underset{\substack{\cap \\ W}}{0} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{z}$

$\Rightarrow p(z) = 0$

3) $(p + q)(v) = p(v) + q(v)$ $\qquad$ se $v = w + z$

$p(v) = w \ , \ q(v) = z$

$\Rightarrow w + z = v = p(v) + q(v)$

$\Rightarrow (p + q)(v) = v$

cioè $(p + q) = Id_V$

4) Resta da vedere che $\mathrm{Ker}(p) = Z$

Visto che se $z \in Z$ ho $p(z) = 0$ perché $z = \overset{W}{\overset{\cup}{0}} + \overset{Z}{\overset{\cup}{z}}$

cioè $z \in \mathrm{Ker}(p)$

Viceversa se $p(v) = 0$ $\qquad v = \underset{0}{\underset{\parallel}{p(v)}} + \underset{Z}{\underset{\cap}{q(v)}}$

$\Rightarrow v \in Z$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(p) = Z$

(analogo : $\mathrm{Ker}(q) = W$) $\square$

<u>ES</u> $\quad V = \mathbb{R}^2 \qquad W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$W \cap Z = \{0\}$ (non sono proporzionali)

$$\dim(W+Z) \underset{\text{Grassman}}{=} \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

$$1 + 1 - 0 = 2$$

$\Rightarrow W + Z = \mathbb{R}^2$

(In generale se $W \cap Z = \{0\}$

e $\dim W + \dim Z = \dim V$

$\Rightarrow V = W \oplus Z$)

$\mathbb{R}^2 = W \oplus Z$

Calcoliamo le proiezioni associate p, q $\qquad w = \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Dato $x \in \mathbb{R}^2$ voglio scrivere $x = w + z$ $\qquad z = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

sarà $q(x)$

sarà $p(x)$

Devo risolvere

$$\begin{cases} 7\alpha + 4\beta = x_1 \\ 3\alpha - \beta = x_2 \end{cases}$$

risolvo rispetto ad α, β

$$\alpha = \frac{x_1 + 4x_2}{19} \qquad \beta = \frac{3x_1 - 7x_2}{19}$$

$$\rho(x) = \frac{x_1 + 4x_2}{19}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \rho(x) = \frac{3x_1 - 7x_2}{19}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ES $V = \mathbb{R}^3$

$W = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$

$\dim W = 1 \qquad \dim Z = 2$ (formula di dimensione)

(base di $Z = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Proviamo che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ basta verificare che $W \cap Z = \{0\}$:

$v \in W \cap Z$ $\quad v = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ e soddisfa $5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

$$5(2\lambda) - (1 \cdot \lambda) - 2(-7 \cdot \lambda) = 0$$

$$10\lambda - \lambda + 14\lambda = 0 \qquad 23\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \qquad \Rightarrow v = 0 \qquad \Rightarrow W \cap Z = \{0\}$$

Calcolo le proiezioni su W e Z di $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Voglio scrivere $\boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{z}}$

Deve essere $\boxed{w = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}}$ e z soddisfa $5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

Cioè cerco λ tale che

$$z = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}} \quad \text{soddisfa} \quad 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\longrightarrow \quad 5(3 - \lambda \cdot 2) - (2 - \lambda) - 2(-8 + \lambda \cdot 7) = 0$$

$$29 - 23\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{29}{23}$$

$$p\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{29}{23} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$q\begin{pmatrix}3\\2\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-8\end{pmatrix} - \frac{29}{23}\begin{pmatrix}2\\1\\-7\end{pmatrix} = \dots$$

<u>Prop</u> Se $p : V \to V$ soddisfa $p \circ p = p$. Allora p è una proiezione associata a $V = W \oplus Z$ dove $W = \mathrm{Im}(p)$, $Z = \mathrm{Ker}(p)$.

<u>DIM</u> Poniamo $W = \mathrm{Im}(p)$, $Z = \mathrm{Ker}(p)$.

Devo provare:

- $\underline{V = W + Z}$

$$\underset{\displaystyle V}{\underset{\cup}{v}} = \underset{\displaystyle \mathrm{Im}(p)}{\underset{\cup}{p(v)}} + \underbrace{\big(v - p(v)\big)}_{\displaystyle \underset{\mathrm{Ker}(p)}{\cup}}$$ perché:

$$p(v - p(v)) = p(v) - p(p(v)) = p(v) - p(v) = 0$$

· $W \cap Z = \{0\}$ se $v \in W \cap Z$ devo avere

$$v = p(x) \quad e \quad p(v) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = p(v) = p(p(x)) = p(x) = v$$

$v \in \mathrm{Im}\, p$ $\qquad$ $v \in \mathrm{Ker}\, p$

Ho provato che $V = W \oplus Z$ e la proiezione su W è p ☒

$f : V \to W$ lineare se $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$

Esempio ("prototipo") Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ la mappa

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto A \cdot x \quad \text{è lineare.}$$

<u>OSS</u> $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ con struttura di sp. vett. data da

$$(f_1 + f_2)(s) = f_1(s) + f_2(s)$$ insieme $+$

$$(\lambda f)(s) = \lambda \cdot (f(s))$$ e prod. per scalare

Dunque posso considerare $\mathcal{F}(S, W)$ con W sp. vett

ha struttura di sp. vett.:

$$(f_1 + f_2)(s) = f_1(s) + f_2(s) \quad , \quad (\lambda f)(s) = \lambda \cdot f(s)$$

Def $\mathcal{L}(V, W) := \{ f : \mathcal{F}(V, W) : f$ lineari $\}$

= "l'insieme di tutte le appl. lineari da V in W"

(dove V, W sono sp. vett.)

Prop $\mathcal{L}(V, W)$ è stsp di $\mathcal{F}(V, W)$

(cioè "una comb. lin. di appl lin è ancora lineare")

Dim siano $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(V, W)$. Provo che

$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ è lineare. Cioè:

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \overset{?}{=} \alpha_1 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) + \alpha_2 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$$

$$\lambda_1 \cdot f_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \lambda_2 \cdot f_2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$$

$$= \lambda_1 \alpha_1 f_1(v_1) + \lambda_1 \alpha_2 f_1(v_2) + \lambda_2 \alpha_1 f_2(v_1) +$$
$$+ \lambda_2 \alpha_2 f_2(v_2)$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 f(v_1) + \alpha_1 \lambda_2 f_2(v_1)$$
$$+ \alpha_2 \lambda_1 f_1(v_2) +$$
$$+ \alpha_2 \lambda_2 f_2(v_2)$$

Q : Cos'è $\mathcal{L}(V, W)$?

A : "Le matrici"

Vero sicuramente per V, W sp. vettoriali di vettori colonne.

<u>Teo</u> l'applicazione $M_{m \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$A \longmapsto f_A$$

è lineare e bigettiva. Quindi $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è uguale come sp. vett. $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e in modo canonico (senza fare scelte).