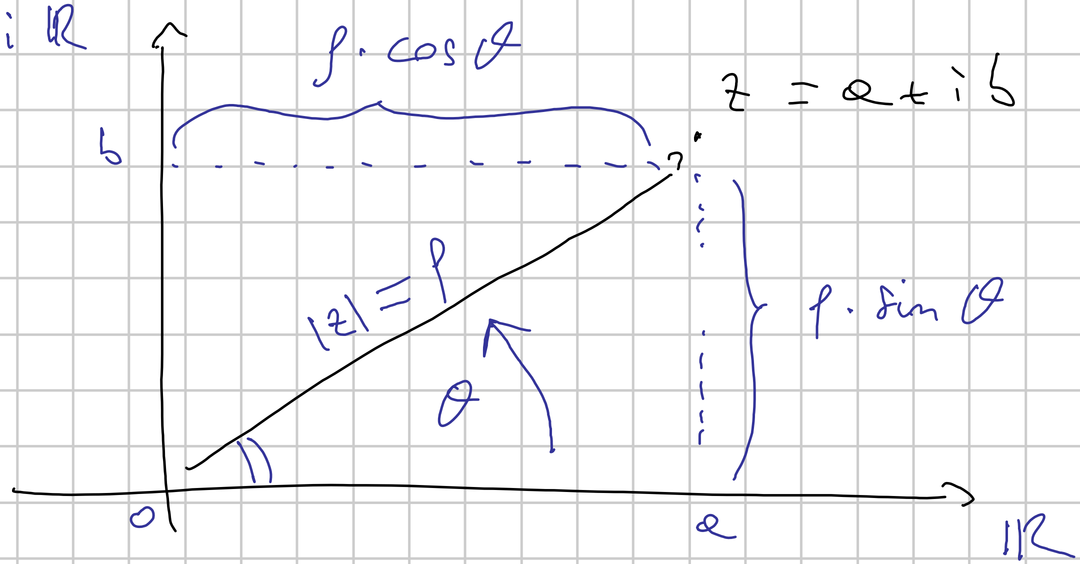
Alg Lin 2/12/2015

Numeri complessi $\mathbb{C} = \{ a + ib \ ; a, b \in \mathbb{R} \}$

$i^2 = -1$

Forma polare trigonometrica

$a + ib$ lo esprimo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ in coordinate polari (ρ, θ)



$\Rightarrow \quad \rho = |z| \quad ; \quad \vartheta = \arg(z)$ argomento

<u>Attenzione</u> : $\arg(z)$ non è unico

- se $z = 0$ va bene qualsiasi angolo $\vartheta \in \mathbb{R}$

- se $z \neq 0$ e ϑ_0 è un argomento, $\vartheta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

è ancora un argomento di z.

$$\boxed{z = \rho \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)}$$

Visto che $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Prop $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$

Dim posto $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$

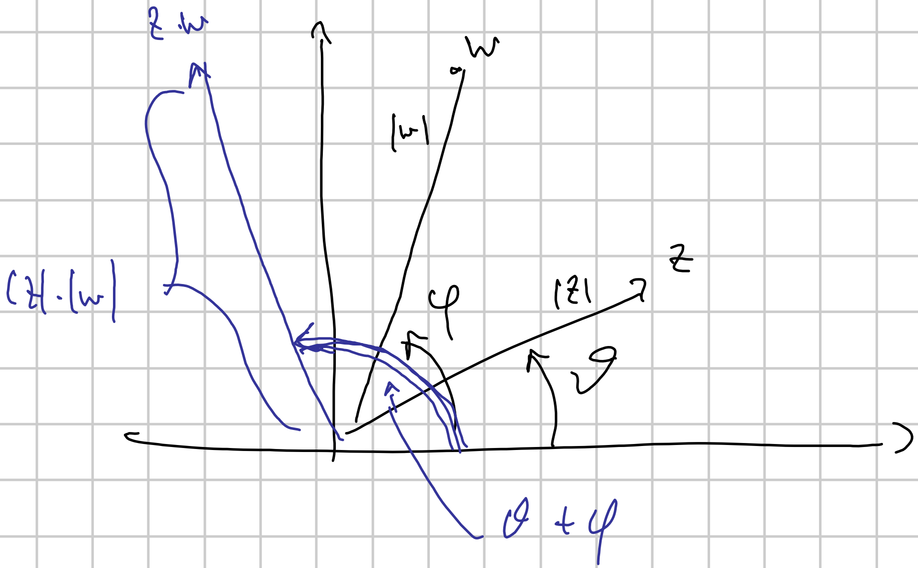
$w = \eta(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$$z \cdot w = \rho \cdot \eta \cdot \left(\underbrace{\cos\theta \cdot \cos\varphi - \sin\theta \cdot \sin\varphi}_{'} + i\left(\underline{\cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi}\right)\right)$$

$$= \rho \cdot \eta \left(\overbrace{\cos(\vartheta + \varphi)}^{} + i \overbrace{\sin(\vartheta + \varphi)}^{} \right)$$

$\boxed{3}$

Interpretazione geometrica



OSS fissato z la trasformazione

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$w \longmapsto z \cdot w$$

è la composizione di

- omotetia di centro O e ragione $|z|$
- rotazione di angolo $\arg(z)$ attorno a O.

Enunciato equivalente della prop

Posto $E(\vartheta) = \cos\theta + i \sin\theta$ si ha

$$E(\vartheta+\varphi) = E(\theta) \cdot E(\varphi)$$

Ricordiamo se $\lambda > 0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ si ha $\lambda^{t+s} = \lambda^t \cdot \lambda^s$

$\Rightarrow$ notiamo che $E(\theta)$ soddisfa la proprietà fondamentale dell'esponenziale. Di fatto possiamo scrivere $E(\theta)$ come esponenziale (con base non reale);

fatto: la scelta giusta per la base è e^i, cioè conveniamo

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Giustificazione analitica: approssimazione di Taylor

$$e^t \cong 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots + \frac{1}{n!}t^n + \dots$$

$$\cos t \cong 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \dots (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin t \cong t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \dots (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

<u>Fatto</u>: facendo somme infinite queste approssimazioni diventano uguaglianze

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad \cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ora

$$e^{i\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \vartheta^n}{n!} =$$

$$i^0 = \underline{1} \qquad i^1 = i \qquad i^2 = \underline{-1} \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = \underline{+1}$$

$i^5 = \underline{i}$ $\quad i^6 = \underline{-1}$ $\quad \ldots$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^{2k}}{(2k)!}}_{\cos\vartheta} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin\vartheta}$$

$$\Rightarrow e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$$

<u>Cor</u> per $\vartheta = \pi$ ho $\boxed{e^{i\pi} = -1} \Rightarrow e^{i\pi} + \underline{1} = 0$

Equazioni polinomiali

$$\mathbb{C}[z] = \{ a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_d \cdot z^d \; : \; d \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{C} \}$$

(solita avvertenza : $0 \cdot z^k$ è sempre il pol. cost $= 0$)

Q : quante soluzioni ha l'eq $p(z) = 0$

con $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, con $\deg(p(z)) = n$?

Primo caso : $z^n = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{C}$

(cerco le radici n-esime di α)

In $\mathbb{R}$

$$x^n = a \quad \begin{cases} \underline{2} \text{ soluz. se } n \text{ pari e } a > 0 \\ \underline{\text{nessuna}} \text{ soluz. se } n \text{ pari e } a < 0 \\ \underline{\text{una}} \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il numero di soluz. non dipende da n, ma dalla sua parità.

In $\mathbb{C}$ inizio con $z^n = 1$ (radici n-esime di 1)

cerco soluz. in forma polare $z = \rho \cdot e^{i\theta}$

Voglio $(\rho \cdot e^{i\theta})^n = 1$ cioè

$$\rho^n \cdot e^{in\theta} = 1$$

$$\begin{cases} \rho^n & \text{è } \underline{\underline{\text{il}}} \text{ modulo di } 1 \\ n\theta & \text{è } \underline{\underline{\text{un}}} \text{ argomento di } 1 \end{cases}$$

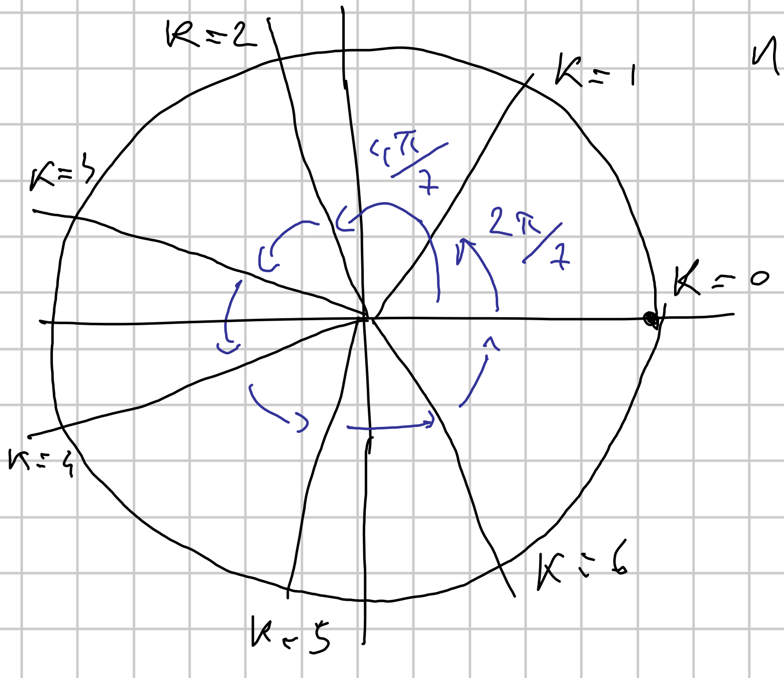
cioè

$$\begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

cioè

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \qquad \underline{k \in \mathbb{Z}} \qquad \Rightarrow \text{infinite? } \underline{\text{NO}}$$

$n = 7$



Esistono n soluzioni distinte di $z^n = 1$

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} \qquad k = 0, \dots, n-1$$

e sono i vertici di un poligono regolare con n lati inscritto nella circonf. di raggio 1 con $1 \in \mathbb{C}$ tra i suoi vertici.