Alg. Lin 1/XII/2015

ES $\mathbb{R}^3$

$$E = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\\ -3 & 6\end{vmatrix} \quad \to -6,\ 57,\ 30$$

$$30x - 57y + (-6)z = 45$$

$$30\cdot 3 - 57\cdot 1 + (-6)(-2) = 45$$

$$\longleftarrow \qquad E:\quad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \qquad \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \neq 0 \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0$$

$$E = \frac{\delta}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} + \operatorname{Span}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma\\0\\-\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\gamma\\-\beta\end{pmatrix}\right)}$$

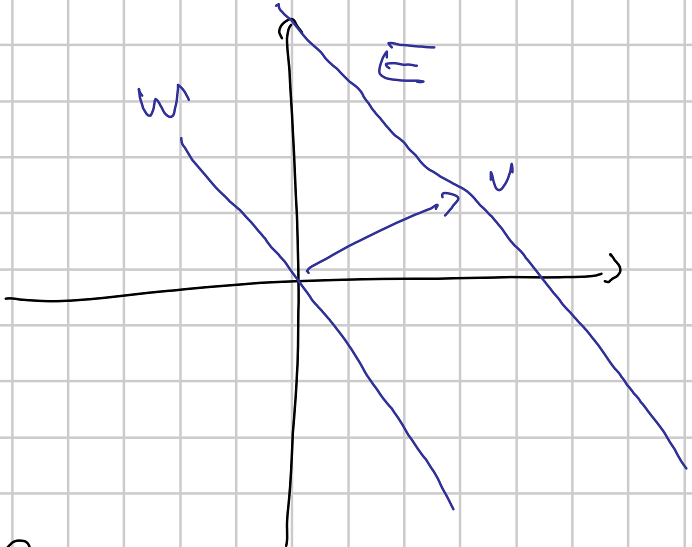
3 vettori, ma generano ssp. di dim 2
ma posso sempre scartarne 1
(ma a priori non so quale)

ES $7x - 11y + 4z = \underline{8}$

$$2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}11\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\11\end{pmatrix}\right)$$

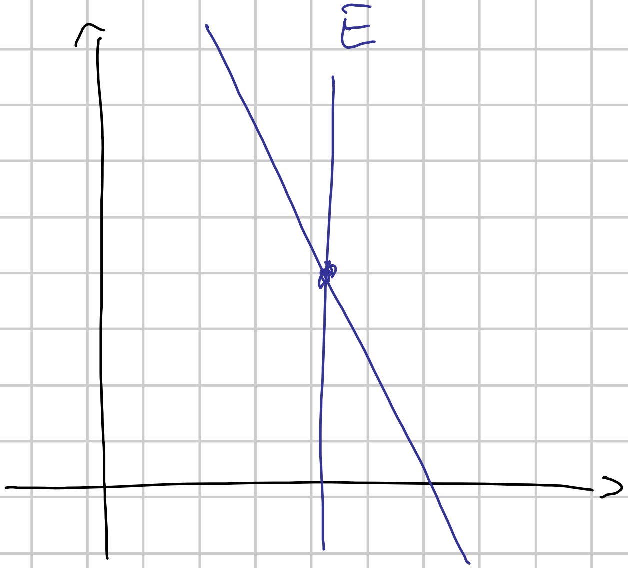
$$2\left(7\cdot 0 - 11\cdot 0 + 4\cdot \boxed{1}\right) = 2\cdot 4 = 8$$

Sottosp. affine di V sp. vett. è $E = v + W$
$v \in V$, $W \subset V$ ssp. vett.



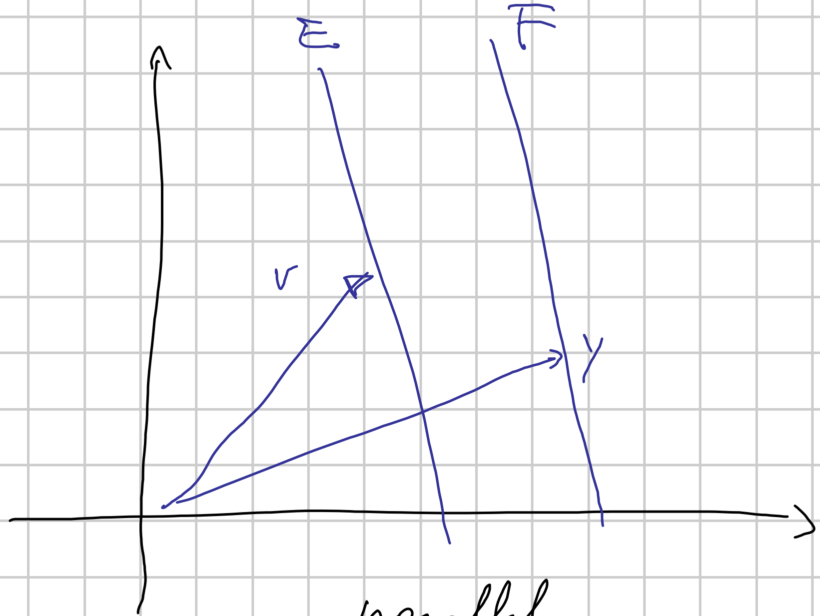
Posizioni reciproche di due ssp. aff.

$E = v + W$, $F = y + Z$



incidenti

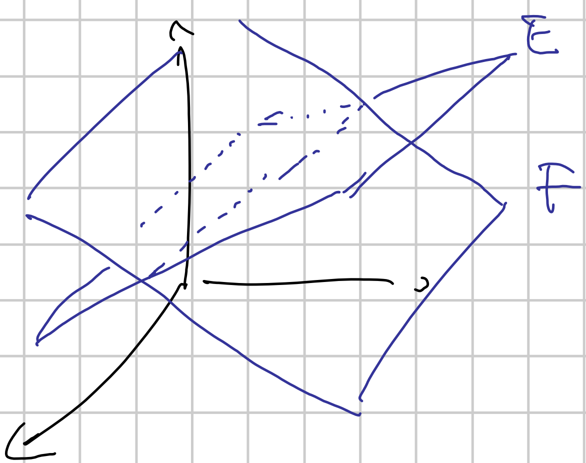
$E + F = \mathbb{R}^2$



parallele

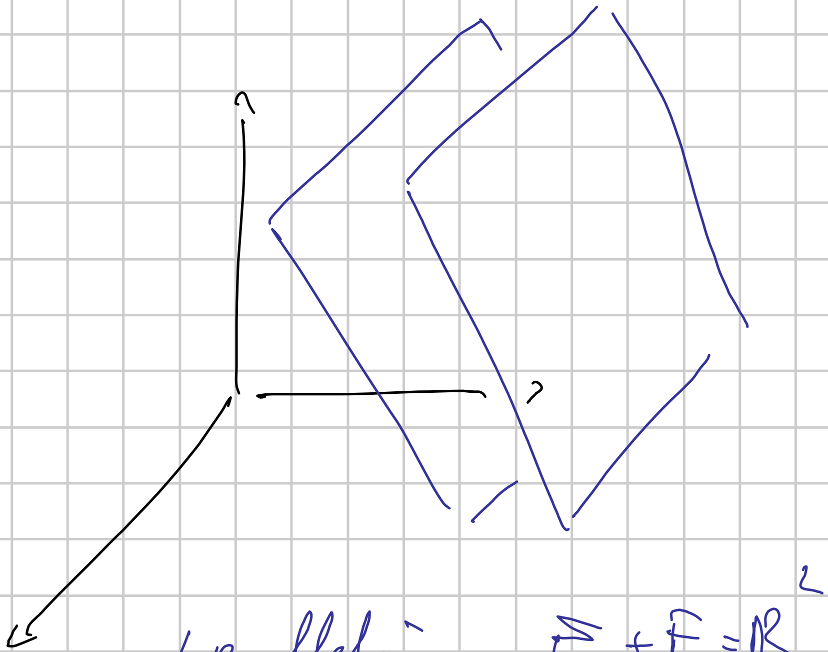
(due rette distinte in $\mathbb{R}^2$) $E+F=\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$



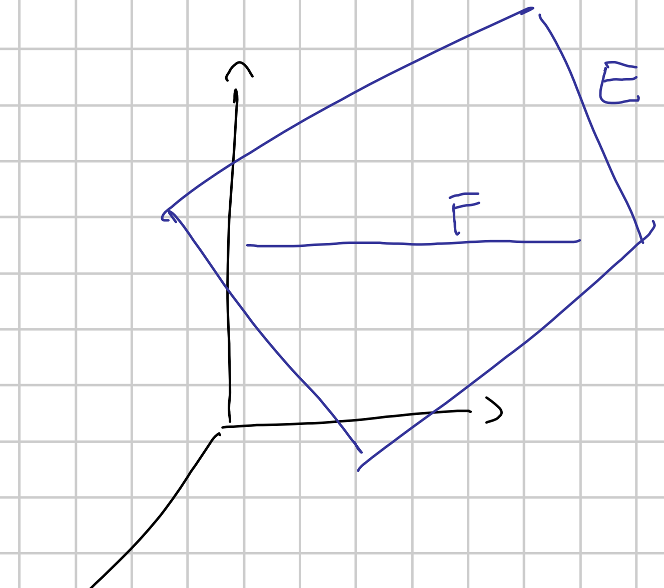
incidenti in una retta

$E + F = \mathbb{R}^3$



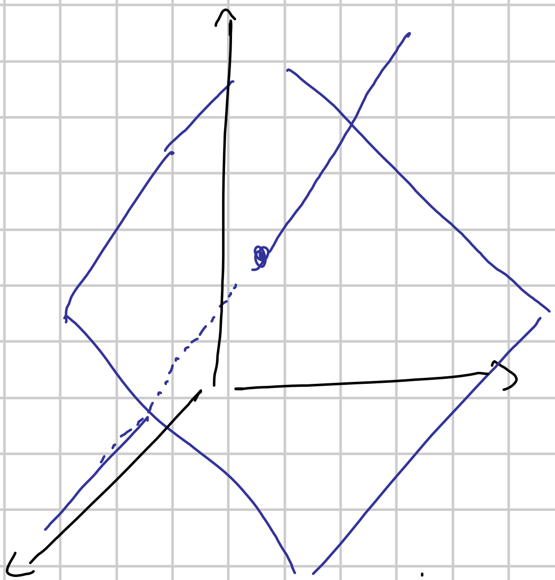
paralleli $E + F = \mathbb{R}^2$

(due piani in $\mathbb{R}^3$ distinti)



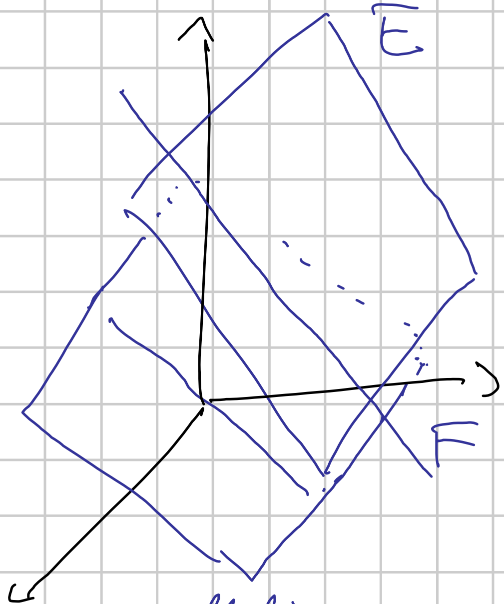
$F \subset E$

$E + F = E$



incidenti in un punto

$E + F = \mathbb{R}^3$



paralleli

$E + F = \mathbb{R}^3$

$E \cap F = \emptyset$

$W \supset Z$

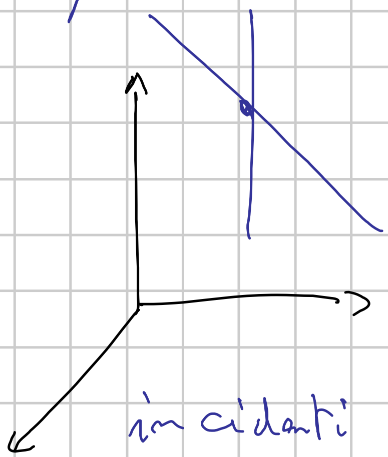
(piano e retta in $\mathbb{R}^3$)

Def dico che E ed F sono <u>paralleli</u>, scrivo $E \,/\!/\, F$

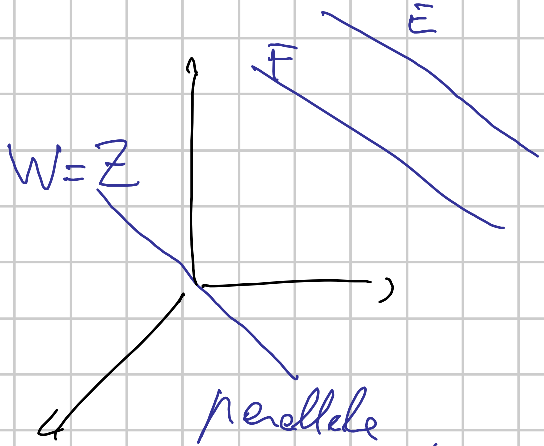
se $W \subset Z$ oppure $Z \subset W$

due rette (distinte) in $\mathbb{R}^3$

$E + F =$ piano

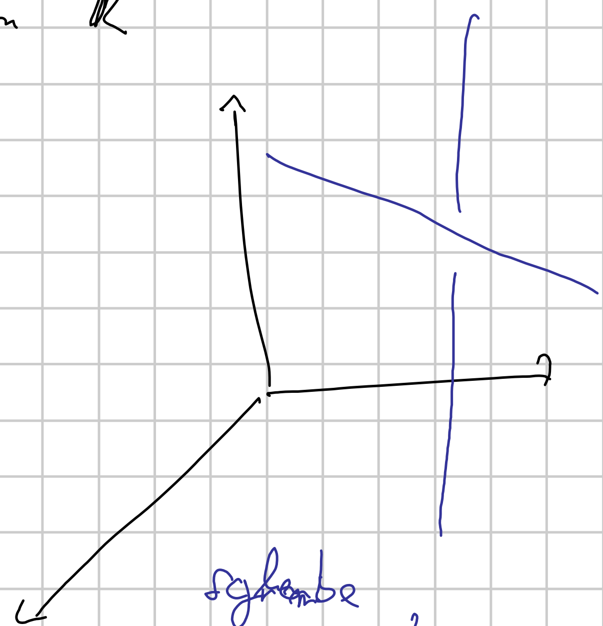


incidenti in un punto



parallele $\Rightarrow$ contenute in un piano

$E + F =$ piano



sghembe

$E + F = \mathbb{R}^3$

<u>Richiamo</u> $W+Z$ è il più piccolo ssp. vett. che contiene W e Z

e si ha

$$W+Z = \{ w+z \;:\; w \in W,\ z \in Z \}$$

$$\dim(W+Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

<u>Def</u> dati $E = v+W$, $F = u+Z$ sssp affini

chiamo $E+F$ è il più piccolo sssp. affine

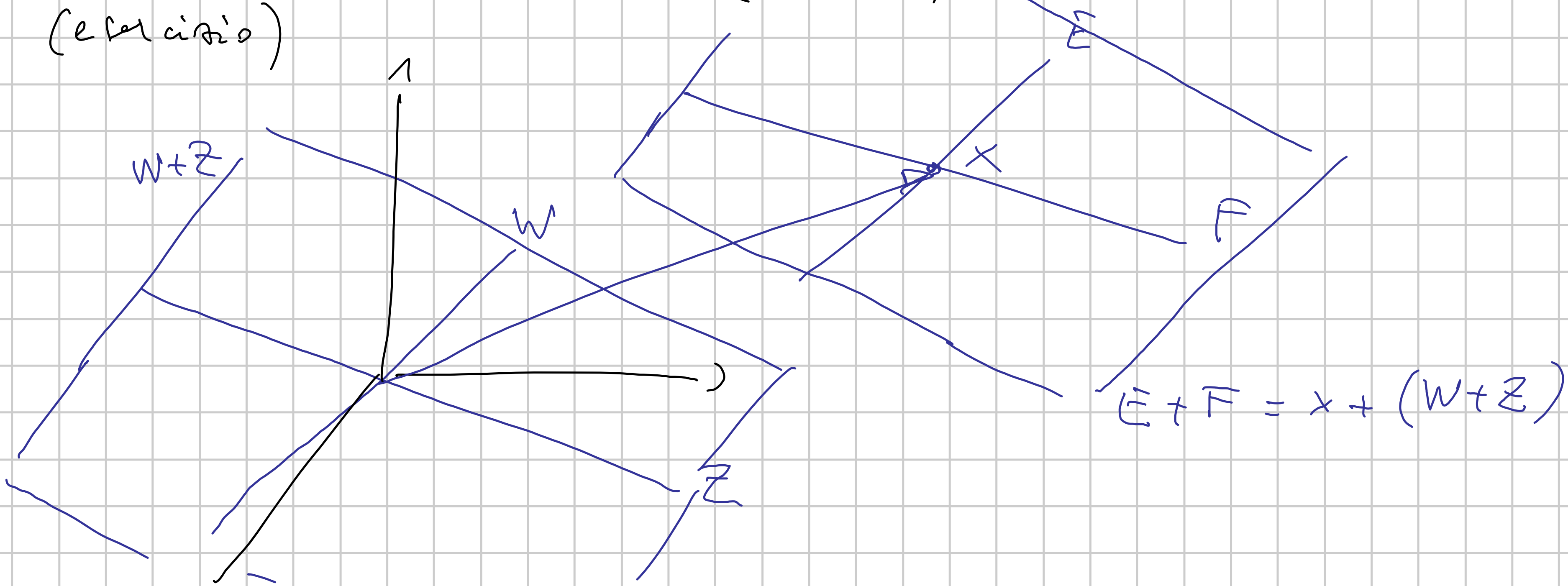
che contiene sia E che F.

<u>Prop</u> $\dim(E+F) = \begin{cases} \dim(W+Z) & \text{se } E \cap F \neq \emptyset \\ \dim(W+Z)+1 & \text{se } E \cap F = \emptyset \end{cases}$

Dim Se $E \cap F \neq \emptyset$. Prendo $x \in E \cap F$ e ho

$E = x + W$, $F = x + Z$

$\Rightarrow E + F = x + (W + Z)$
(esercizio)



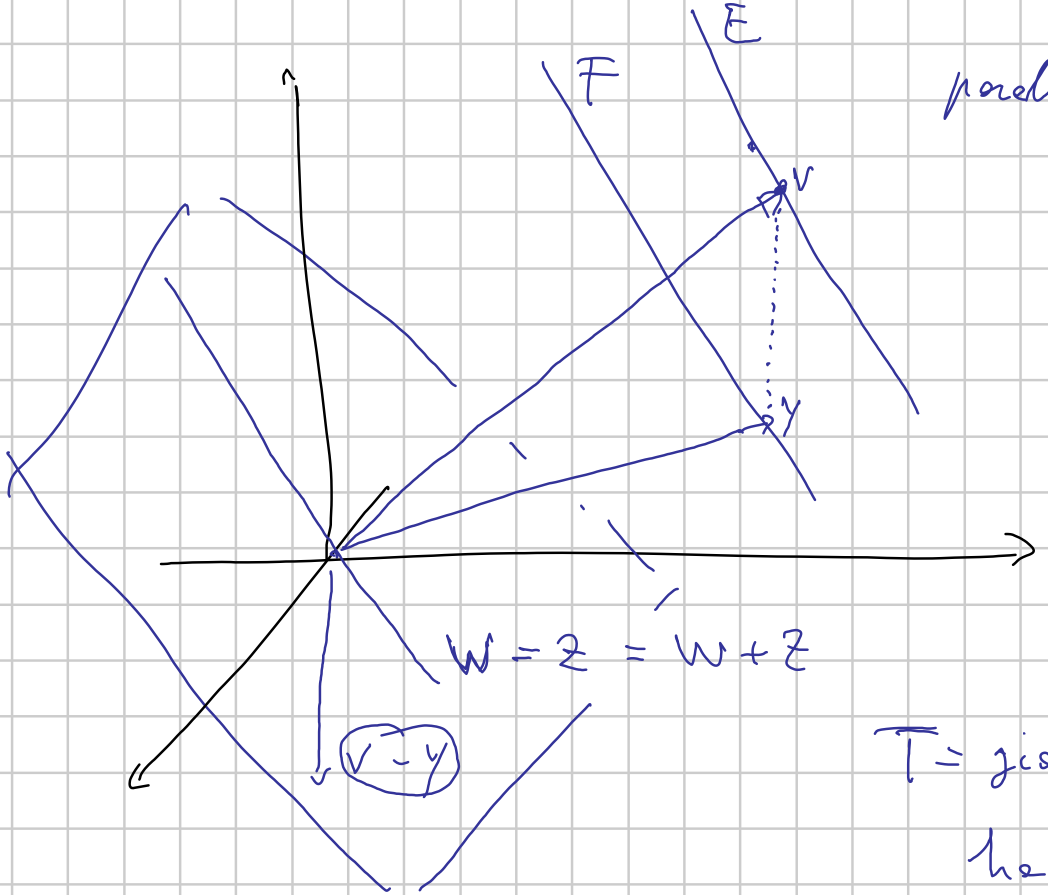
· Sia invece $E \cap F = \emptyset$. Affermo:

(1) $v - y \notin W + Z$

(dunque $T = \text{Span}(v-y) \oplus (W+Z)$ ha dim $1 + \dim(W+Z)$)

(2) $E + F = v + T$ (dunque la tesi).

(dim tra poco; vediamo prima un esempio)

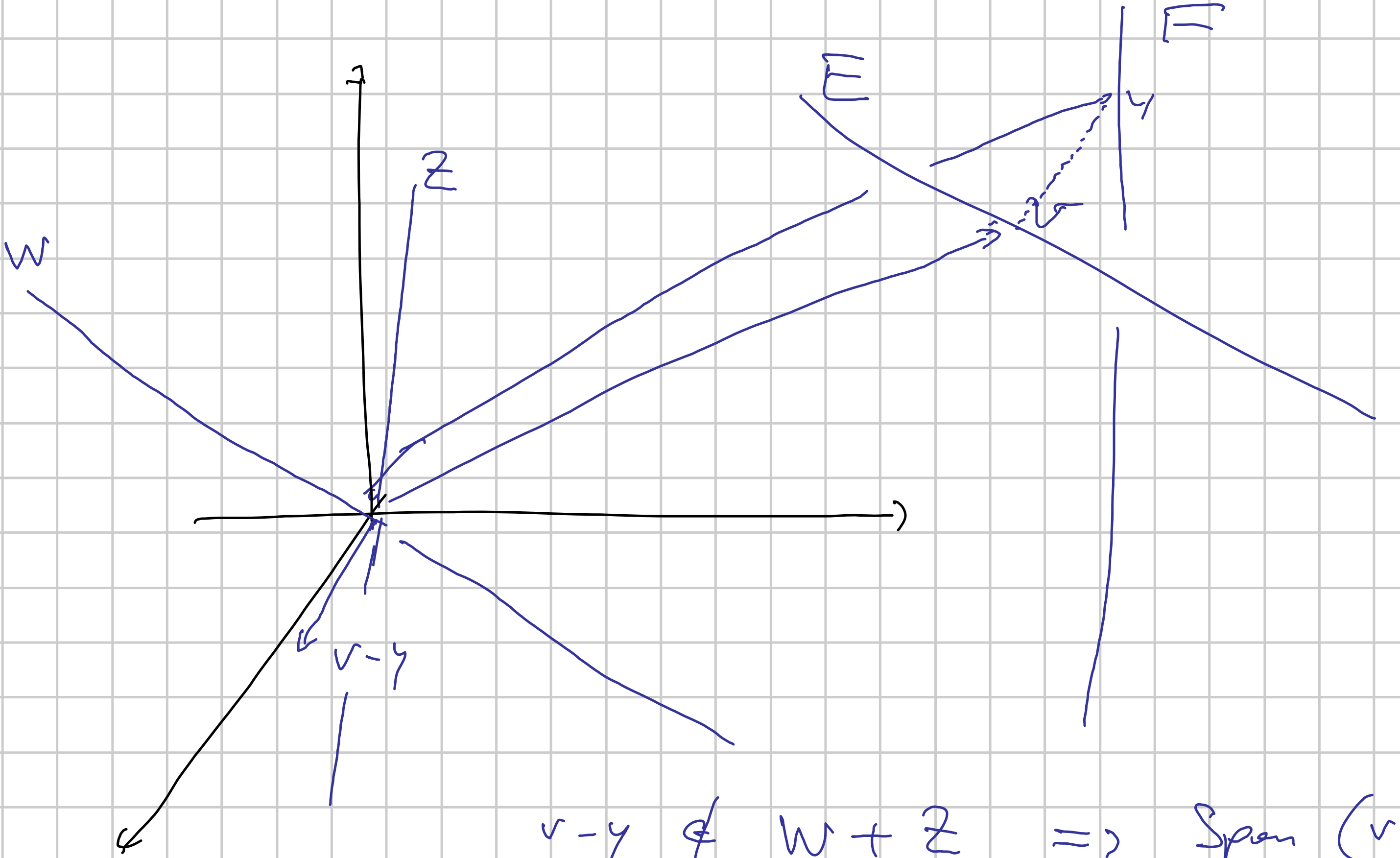


parallele

$v - y$

T = giacitura di E + F

ha dim > dim (W + Z)



$$v - y \notin W + Z \implies \mathrm{Span}(v - y) + (W + Z) = \mathbb{R}^3$$

$$\implies E + F = v + \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$$

Dim (1) $v - y \notin W + Z$. Altrimenti

$$v - y = w + z \implies \underset{\substack{\cap \\ v + W \\ \| \\ \tilde{E}}}{v - w} = \underset{\substack{\cap \\ y + Z \\ \| \\ \tilde{F}}}{y + z}$$

quindi avrei $v - w = y + z \in \tilde{E} \cap \tilde{F}$, Assurdo

perché $\tilde{E} \cap \tilde{F} = \emptyset$

(2) esercizio

OSS attenzione all'uso dell'intuizione in dim > 3

$\hookrightarrow$ non usarla: usare Grassmann e la sua versione per spazi affini.

Es Esistono in $\mathbb{R}^4$ due piani disgiunti e non paralleli?

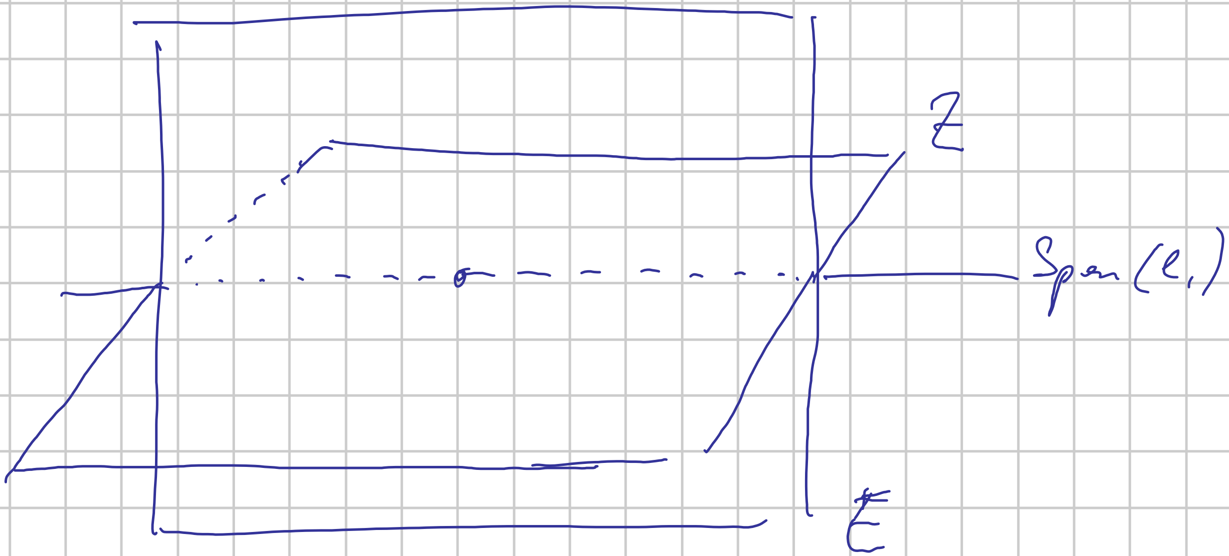
In $\mathbb{R}^3$ no: due piani non paralleli distinti si intersecano in una retta.

In $\mathbb{R}^4$ sì.

$$E = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$$

$$Z = \mathrm{Span}(e_1, e_3)$$

$$F = e_4 + \mathrm{Span}(e_1, e_3)$$



$F = Z$ traslato nella IV dimensione

Numeri complessi

Fatto $x^2+1=0$ è un'eq. che non ha soluzioni in $\mathbb{R}$.

Invento un oggetto i = unità immaginaria

che non è in $\mathbb{R}$ e risolve l'eq. cioè

$$i^2+1=0 \qquad (i^2=-1)$$

Se tratto i come un numero, possiamo fare

$\to$ $a+i$ con $a \in \mathbb{R}$

$\to$ $i \cdot b$ con $b \in \mathbb{R}$

inventati perchè ho

$a + i \cdot b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ / aggiunto i

$$(a+ib)+(c+id) = \underbrace{(a+c)+i(b+d)}$$

già visto: è della forma $\alpha + i\beta$.

$$(a+ib)\cdot(c+id) = \underbrace{(a\cdot c - bd)+i(bc+ad)}$$

già visto: è della forma $\alpha + i\beta$.

$$= a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id =$$
$$= a \cdot c + iad + ibc + i^2 \cdot bd =$$
$$= ac + i(ad + bc) - bd =$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Pongo $\mathbb{C} = \{ a + ib \ ; \ a, b \in \mathbb{R} \}$ insieme dei numeri complessi.

abbiamo definito due operazioni

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$(a+ib) + (c+id) \longmapsto (a+c) + i(b+d)$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) \longmapsto (ac-bd)+i(ad+bc)$$

Scrivo per semplicità:

$a + i\cdot 0 = a \implies \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$0 + ib = ib \implies i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1$$

<u>Teo</u> $\mathbb{C}$ con tale struttura è un campo; cioè

(i)–(4) : $\mathbb{C}, +, 0$ è gruppo commut

(5) – (8) $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1$ è gruppo commut.

(9) distrib.

<u>oss</u> tutte facili tranne la (6) (esistenza dell'inverso)

(3) $$\big((a+ib)+(c+id)\big)+(x+iy) \overset{?}{=} (a+ib)+\big((c+id)+(x+iy)\big)$$

$$\big((a+c)+i(b+d)\big)+(x+iy) \qquad (a+ib)+\big((c+x)+i(d+y)\big)$$

$$\underbrace{\big((a+c)+x\big)+i\big((b+d)+y\big)}_{} = \underbrace{\big(a+(c+x)\big)+i\big(b+(d+y)\big)}_{}$$

di perché vale (3) per $(\mathbb{R}, +)$

(associatività di + in $\mathbb{R}$)

(6) Prendiamo $a+ib \neq 0$ cioè

$a+ib \neq 0+i0$, cioè $a \neq 0$ oppure $b \neq 0$

Cerco $x+iy$ che sia $(a+ib)^{-1}$. Cioè

$$(a+ib)(x+iy) = 1$$

$$(ax-by)+i(bx+ay) = 1+i\cdot 0$$ cioè

$$\begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2+b^2>0$$ perché a, b non sono entrambi nulli.

$\Longrightarrow \exists$ unica soluzione

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Abbiamo provato $\boxed{(a+ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}}$

Terminologia: se $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$

chiamo

$a = \mathrm{Re}(z)$ parte reale di z

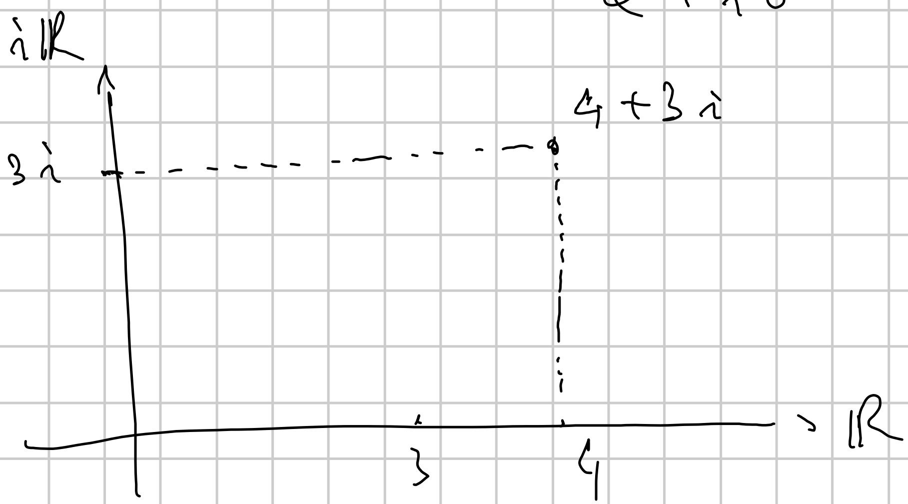
$b = \mathrm{Im}(z)$ parte immaginaria di z.

<u>Attenzione</u> $\Im(7 - 5i) = -5 \in \mathbb{R}$

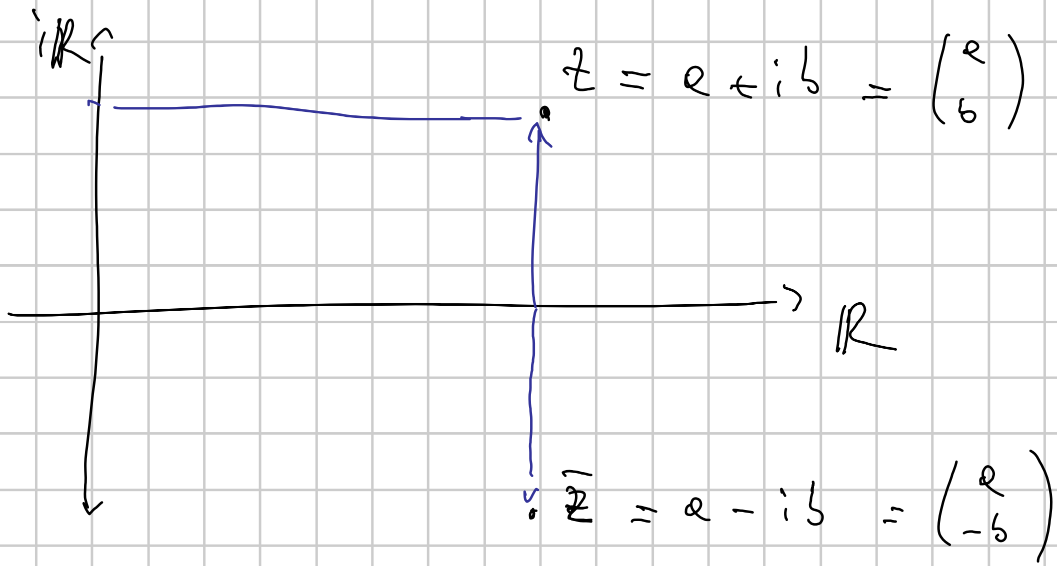
(<u>non</u> è $-5i$)

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \ , \ a, b \in \mathbb{R} \} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$a + ib \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Def Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ chiamo coniugato di z il numero $\bar{z} = a - ib$



Oss $\Re(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$ $\qquad$ $\Im(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Oss $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{\overline{z}} = z$

$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

$$\overline{(a+ib)\cdot(c+id)} \overset{?}{=} \overline{(a+ib)} \cdot \overline{(c+id)} =$$

$$\| $$

$$(ac-bd) - i(ad+bc) \qquad = (a-ib)\cdot(c-id) =$$

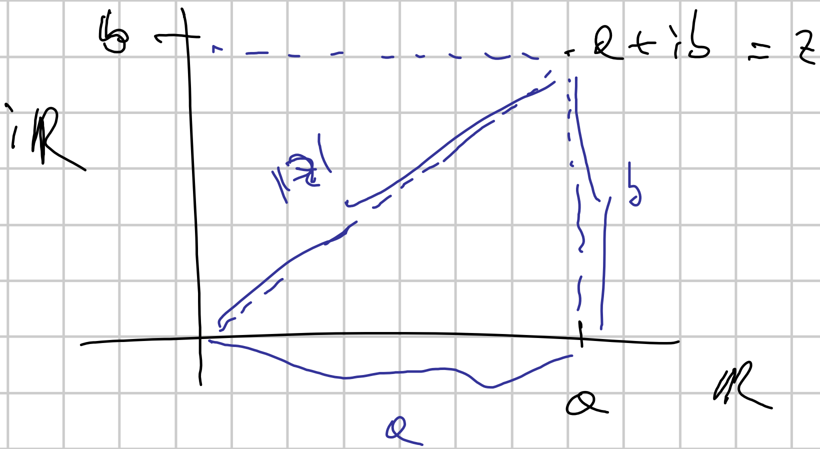
$$= (ac-(-b)(-d)) + i(a(-d)+c(-b))$$

$$=$$

$$\checkmark$$

Def Se $z = a+ib$ chiamo modulo di z

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad (\text{la radice} \geq 0)$$



cioè $|z|$ è la "distanza" di z da 0.

Oss $|\overline{z}| = |z|$

Oss $z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) =$

$= a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|$

$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ $\qquad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ se $z \neq 0$

$\left(\dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2} \right)$

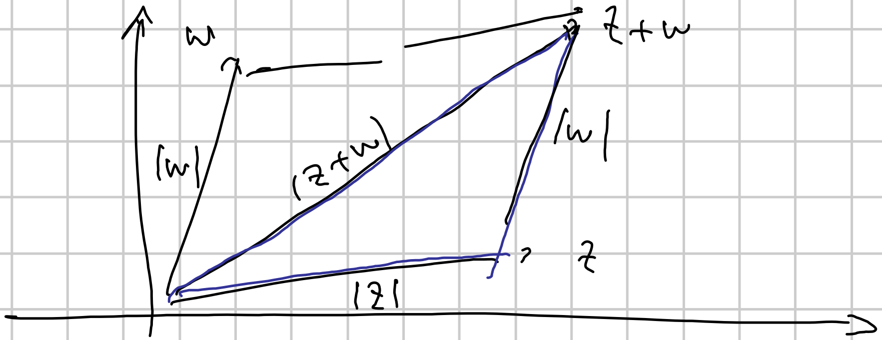
Oss $|z \cdot w| = \sqrt{(z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)}} =$

$= \sqrt{z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w}} = \sqrt{z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w}} =$

$= \sqrt{|z|^2 \cdot |w|^2} = |z| \cdot |w|$

Prop $|z+w| \leq |z| + |w|$ disuguaglianza triangolare

e vale $=$ se e solo se $w = \lambda \cdot z$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \geq 0$



OSS $|\Re(z)| \leq |z| \qquad |\Im(z)| \leq |z|$

$$|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$$

Dim (Prop) $|z+w|^2 = (z+w)\cdot\overline{(z+w)} =$

$$= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = \underbrace{z\cdot\bar{z}}_{|z|^2} + \underbrace{z\cdot\bar{w} + \underbrace{w\cdot\bar{z}}_{\overline{z\cdot\bar{w}}}}_{2\Re(z\cdot\bar{w})} + \underbrace{w\cdot\bar{w}}_{|w|^2}$$

$$2\Re(z\cdot\bar{w})$$

$$\wedge\!\!|$$

$$2|\Re(z\cdot\bar{w})|$$

$$\wedge\!\!|$$

$$|z|^2 + 2|z|\cdot|w| + |w|^2 \geq \{$$

$$||$$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ (|z| + |w|)^2 \end{array}$$

ok

$$\begin{array}{c} \wedge\!\!| \\ 2 \cdot |z \cdot \bar{w}| \\ \wedge\!\!| \\ 2 \cdot |z| \cdot |\bar{w}| \\ \shortparallel \\ 2|z| \cdot |w| \end{array}$$

$\square$