



Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 16 & 9 \\ -26 & -15 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. In $\mathbb{R}^3$ trovare tutti i vettori unitari ortogonali al piano $\text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t+1 : 2 : 2-t : 0]$ appartiene al piano di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per i punti $[1 : 2 : 0 : -1]$, $[0 : 1 : 1 : 0]$ e $[3 : 1 : 0 : 1]$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica $(t+1)x^2 + 2(t-8)xy + 2(t+4)y^2 - x + 2y = 0$ sia una parabola.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $3x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 2xy - 8yz + 4y = 0$.

6. Determinare i segni degli autovalori della matrice hessiana nel punto $(0,0)$ per la funzione $f(x,y) = \log(1+x^2+xy-3y^2)$.

7. Calcolare $\int \omega$ dove $\omega(x,y) = (e^{-3x^7} - y) dx + (x + \cos(1+y-y^2)) dy$
e $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = (3\cos(t), 2\sin(t))$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



1. Considerare le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 9 & -10 & 6 \\ 10 & -10 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = M + {}^t M, \quad C = \frac{1}{3} \left(S + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad A = M - {}^t M.$$

- (A) (3 punti) Provare che M ha un solo autovalore λ reale ed esibire un relativo autovettore v .
- (B) (2 punti) Provare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di S , e che lo stesso avviene per C .
- (C) (4 punti) Determinare gli autovalori di C e una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.
- (D) (3 punti) Per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste $U \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} \sin(\pi \cdot s) \\ 1 - 2s + s^2 - s^3 \\ \frac{s}{2+s^2} - s^2 \end{pmatrix}$ e la sua restrizione β a $[0, 1]$.

- (A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.
- (B) (4 punti) Calcolare la curvatura e la torsione di α nel punto $\alpha(0)$.
- (C) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.
- (D) (2 punti) Calcolare $\int_{\beta} e^{y^3-z} (3y^2 dy - dz)$.



Risposte

5. $\diamond$

1. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2; v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\pm \frac{1}{\sqrt{374}} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -17 \end{pmatrix}$

3. $t = 3$

4. $t = -28$

5. Paraboloide ellittico

6. Uno positivo e uno negativo

7. 12π

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamond$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamond$



Soluzioni

1.

$$(A) \quad p_M(t) = (t-2)(t^2 - t + 2); \lambda = 2, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(B) S e C sono simmetriche

$$(C) \quad \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = \sqrt{29} - 2, \quad \lambda_3 = -\sqrt{29} - 2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{29} - 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{29} + 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(D) \quad a = \pm\sqrt{509}$$

2.

(A) La seconda componente di $\alpha'(t)$ è sempre negativa.

$$(B) \quad \kappa = \frac{8\sqrt{9+8\pi^2}}{(\sqrt{17+4\pi^2})^3}, \quad \tau = -\frac{3\pi(5+\pi^2)}{9+8\pi^2}$$

$$(C) \quad t = \frac{1}{\sqrt{17+4\pi^2}} \begin{pmatrix} 2\pi \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{9+8\pi^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{32\pi^4+172\pi^2+153}} \begin{pmatrix} 10\pi \\ 4\pi^2-3 \\ -4\pi^2-12 \end{pmatrix}$$

$$(D) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{e}} - e$$