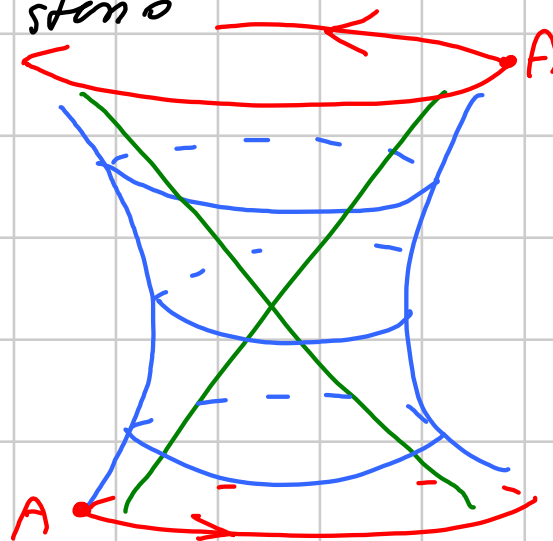
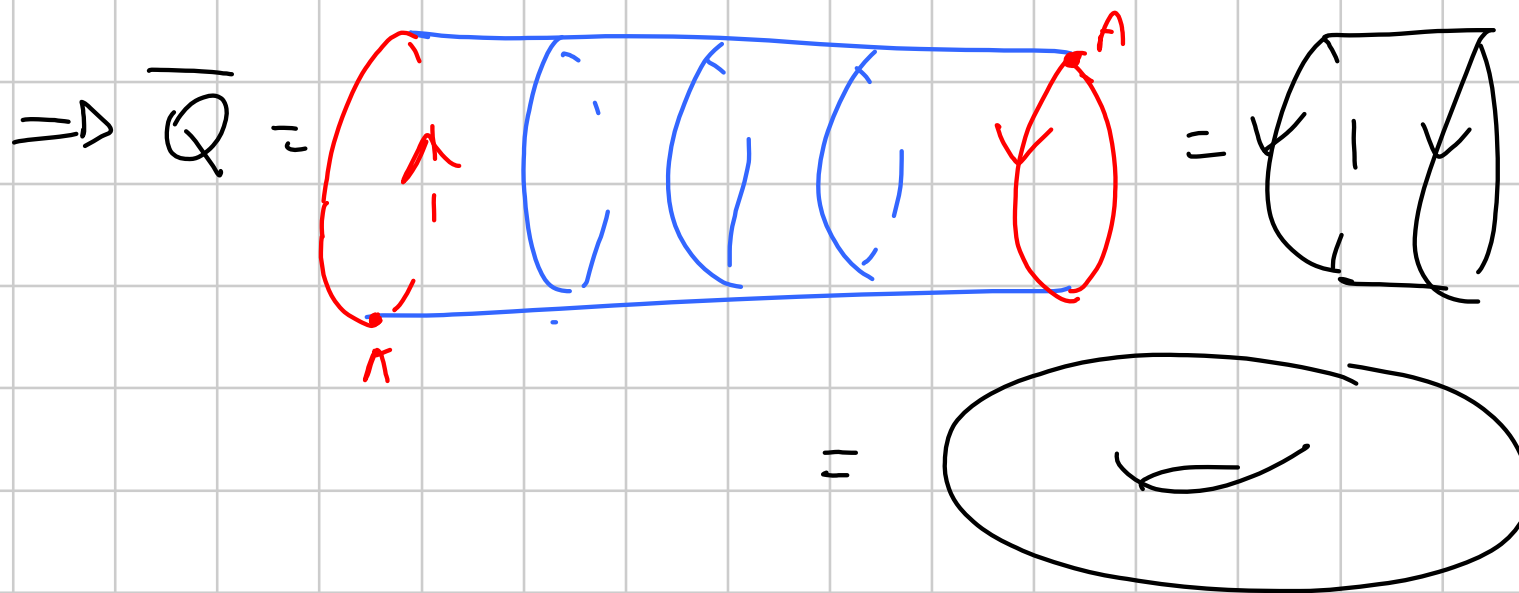


Geometrie 30/4/15

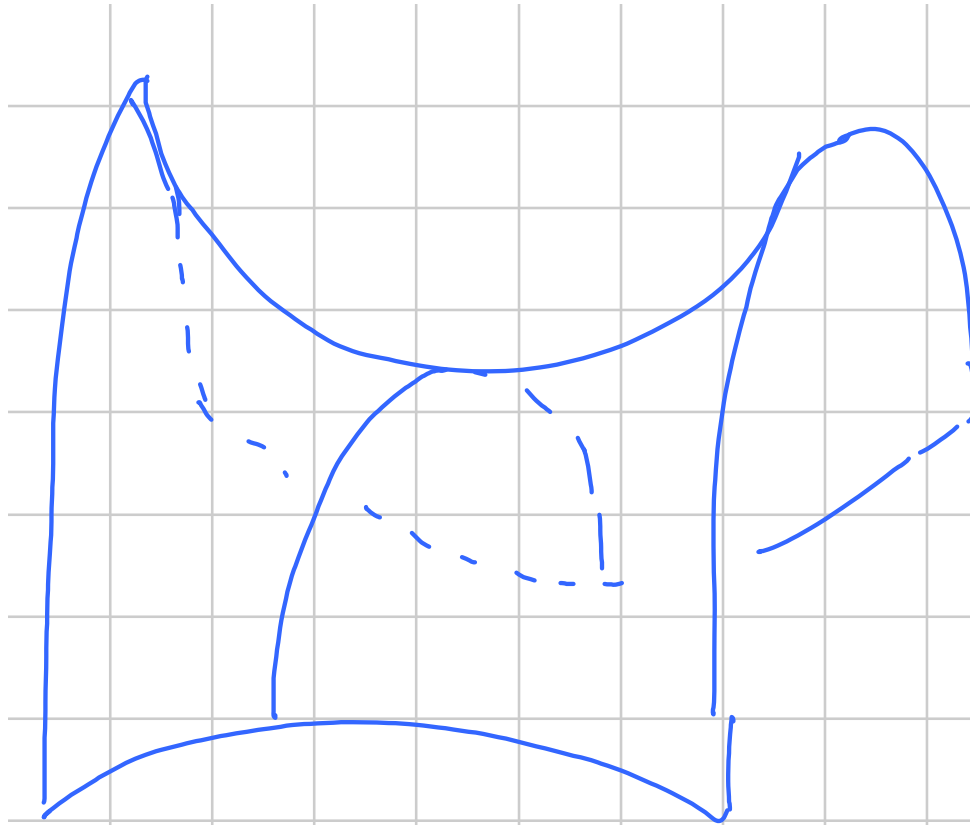
Ese: Se Q è iperb. iperbolico o parab. iperbolico
Allora $\overline{Q}$ è lo stesso

$Q = \text{iperb. iperbolico}$





$Q = \text{parab. iprobolic}$



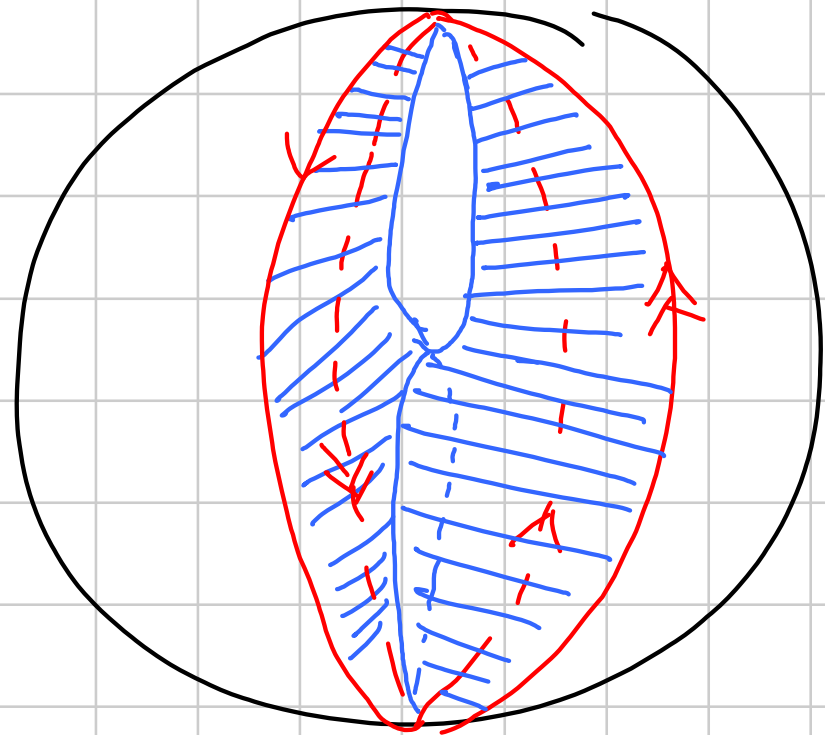
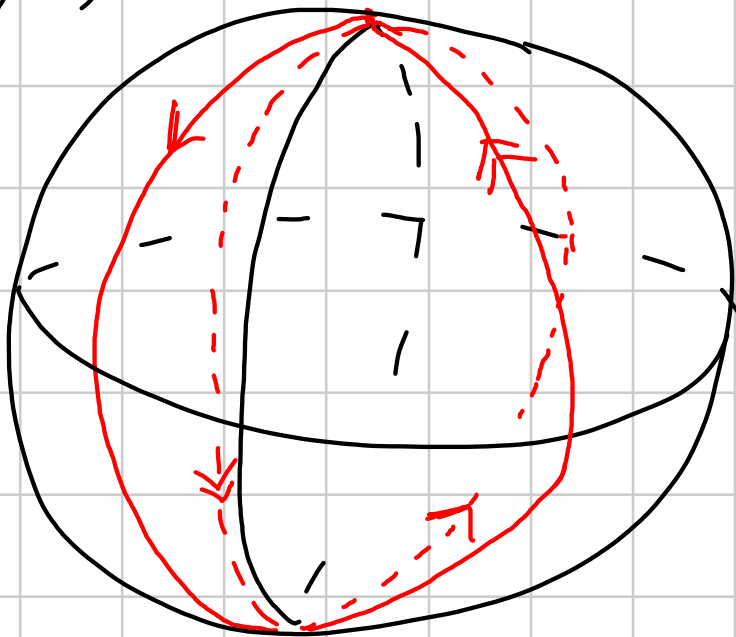
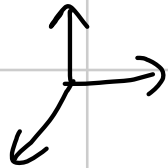
P_t e ∞ sono

$$[1:\pm 1:t]$$

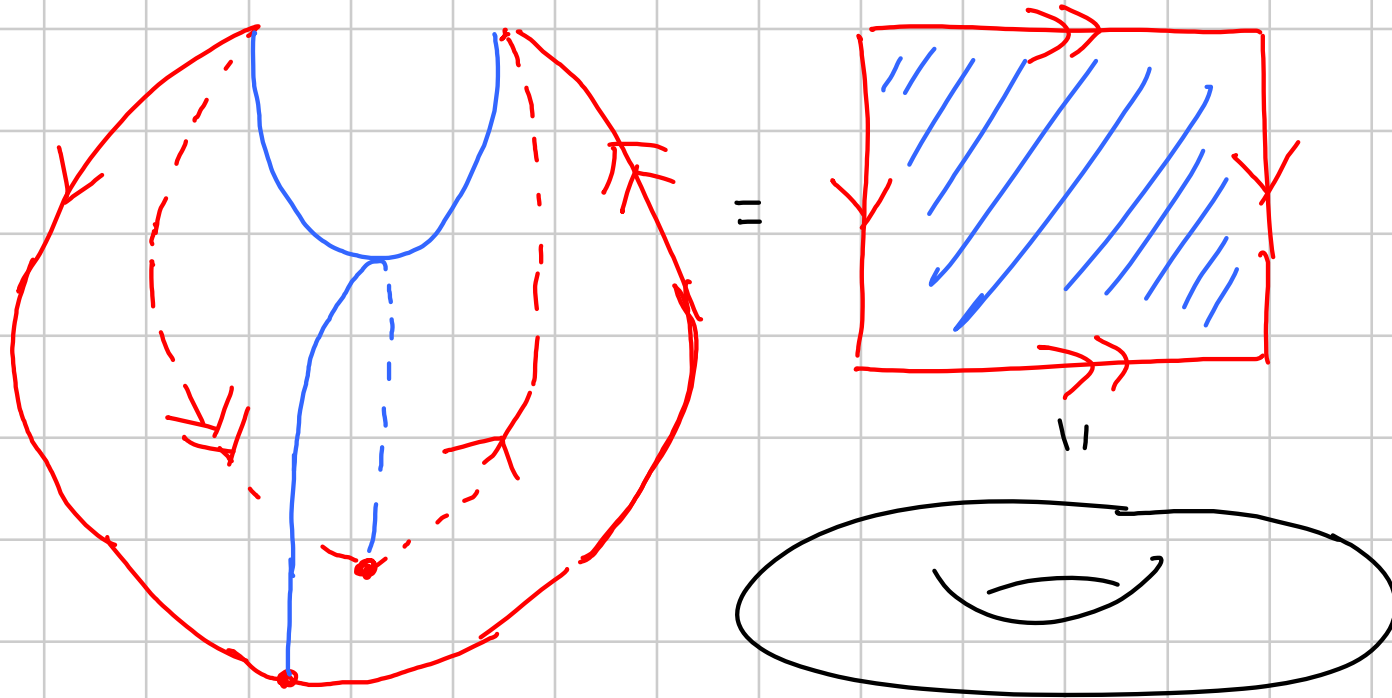
direzioni delle rette
che si proiettano
sulle bisettrici dei
quadranti nel piano
orizz. o inclinat.
verticale variabile

e $[0:0:1]$ (loro
punto e ∞ comune)

Sulle sfere e ∞ (prima di ricordarmi che il verso non conta) ho:



Una ricorrendo che il verso non conta = incollo lungo
prima stacco nei poli



Modelli (1.1) $\emptyset \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array} \right)$$

(1.2) ellissoide $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & -1 \end{array} \right)$$

(1.3) parab. ell. $x_3 = x_1^2 + x_2^2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right)$$

(1.4) iparb. ell. $x_3^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array} \right)$$

(1.5) iparb. iparb. $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_3^2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & -1 \end{array} \right)$$

(1.6) parab. iparb. $x_3 = x_1^2 - x_2^2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right)$$

(2) Teo: ogni quadrica non dep. in $\mathbb{R}^3$
 $(Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0\}$
 $A \text{ simm, } \det(A) \neq 0)$

Si riconduce a uno dei 6 modelli vie:

(i) cambi di coord. affini

(ii) cambio di segno all'equazione —

Dim.: Ho visto che i modelli esistono —
 Inoltre so che su $A = \begin{pmatrix} Q & p \\ t & c \end{pmatrix}$

l'effetto di (i) e (ii) è:

(i) non cambiano i segni degli autovalori di A e Q

(ii) cambiano segni tutti contemporaneamente

Ona posso descrivere i casi (1.1) - (1.6) in modo intrinseco (invariante rispetto alle trasformazioni (i) e (ii)):

	autoval Q	autoval A
(1.1)	tutti concord. $+++$	tutti concord.
(1.2)	tutti concord. $+++$	tre concord. ultimo discorde: $\Delta A \neq 0$

(1.3)	due concordi, uno nullo	tre concordi	ultimo disconce
(1.4)	due concordi, terzo disconce	tre concordi.	ultimo disconce
(1.5)	due concordi, uno disconce	due e due	
(1.6)	due disconce, uno nullo	due e due	

Cio' implica che i casi (1.1) - (1.6) sono davvero distinti rispetto a (i) e (ii) -
Resta da vedere che sono tutti:

Per Q in tabella appaiono (ordine non conta)

$$+++ = ---$$

$$++- = +- -$$

$$++0 = --0$$

$$+-0$$

Non appaiono: $\neq 00$ devo vedere che sono
impossibili.

Se avessi $\neq 00$ tramite (1) otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0$$

assunto -

Ora devo vedere che dato un caso per Q
comparo tutti i casi possibili per A:

Q : + + + Comparo: A : $\begin{matrix} + + + + \\ + + + - \end{matrix}$

Non comparo: - - * *

Provo che è assurdo: se avessi tale caso
avrei $W \subset \mathbb{R}^4$, $\dim W$ t.c. $\langle x|x \rangle_A < 0 \quad \forall x \in W \setminus \{0\}$.

Tuttavia anche Q: +++ ho
 $\langle x|x \rangle_A > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ -

Ora $\dim W = 2$, $\dim(\mathbb{R}^3 \times \{0\}) = 3$, $2+3 > 4$
 $\Rightarrow W \cap (\mathbb{R}^3 \times \{0\}) \neq \{0\}$: Assurdo -

Q: ++- Coppiaio ++-+
 ++--

Non compaiono $\begin{matrix} + + + + \\ - - - * \end{matrix} \}$ Assunti
come sopra

Q : $++0$ Compae solo $+++ -$

Non compaiono : $\begin{matrix} + + + + \\ - - * * \end{matrix}$

$$\langle x|x \rangle_A \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$\langle x|x \rangle_A < 0 \quad \forall x \in W \setminus \{0\}, \dim W = 2$$

$3+2 > 4$: assurdo

assurdo

Q: $+ - 0$

Non compaiono

Comparsa solo $++--$

$\begin{matrix} ++ + * \\ -- - * \end{matrix} \left. \begin{array}{l} \text{assunto} \\ \text{come sopra.} \end{array} \right\}$



Resta: (3) in pratica dato A come trovare
qual è il modello affine della
quadrica definita da A .

Caso facile (e tipico): d_1, d_2, d_3, d_4 tutti $\neq 0$.

Yu tol caso i se pur degli autord

di Q : $d_1, d_2/d_1, d_3/d_2$

di A : $d_1, d_2/d_1, d_3/d_2, d_4/d_3$

$\Rightarrow$ ho il modello -

* Dimenticato : provare che se gli autord. di Q e A rientrano in uno

dei 6 casi, allora tramite (i) e (ii)
posso ricondurre equiv. al modello
corrispondente: FACILE (come per le coniche).

Secondo foglio:

⑭ dire se A è normale e se si
applicare teo spettrale —

$$(a) \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & -3i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2-i & -3i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |2+i|^2 + 1 = |2+i|^2 + 9 \end{array} \right.$$

No

$$(b) \begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix}$$

Non è: hermitiana
anti-hermitiana, unitaria
né un multiplo scalare
di un tale. Può però
essere lo stesso normale.

... (facile)

$$(c) \begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7-i & 5+5i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7-i & 5+5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-5i & -7+i \\ 1-7i & 5-5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5i & -7+i \\ 1-7i & 5-5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7-i & 5+5i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} |5+5i|^2 + |1+7i|^2 = |5+5i|^2 + |-7-i|^2 \quad \sim \\ (5+5i)(-7+i) + (1+7i)(5-5i) = (5-5i)(1+7i) + (-7+i)(5+5i) \quad \checkmark \\ \dots \quad \checkmark \end{cases}$$

$\tilde{S}$, è normale (il che equivale al fatto che sia diapo. via unitarie) —

One cerco $\Lambda_{1,2}$: Troverò $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$
 (perché è diapo e se $\Lambda_1 = \Lambda_2$ sarebbe più dipendente);
 trovando autovettori v_1, v_2 siccome gli

autospazi sono unici $\hookrightarrow \dim = 1$, ho
automaticamente $V_1 \perp V_2$, dunque

la base ortonormale di autovett. è $\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}$.

$$p_A(t) = t^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot t + \det(A)$$

$$\operatorname{tr}(A) = 10(1+i) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 25 \cdot 2i + (7+i)(1+7i) \\ &= 50i + 50i = 100i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{aligned}$$

$$A_1 = 10 \quad A_2 = 10i$$

$$V_1: \begin{cases} (5+5i)x + (1+7i)y = 10x \\ \text{---} \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+49+25+1}} \begin{pmatrix} 1+7i \\ 5-5i \end{pmatrix}$$

$$V_2: \begin{cases} (5+5i)x + (1+7i)y = 10i x \end{cases}$$

$$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1+7i \\ 5i-5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Verificação de } V_1 \perp V_2: 1+49-25-25 = 0$$

⑮ Provare che è unitaria :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} & -i \\ -i\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ i & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2 \ v_3)$$

$$\|v_1\|^2 = \frac{1}{4} (1+2+1) = 1 \quad \|v_2\|^2 = \|v_3\|^2 = 1 \quad \checkmark$$

$$\langle v_1 | v_2 \rangle_{\mathbb{C}^3} = \frac{1}{4} (1 \cdot (+i\sqrt{2}) + (-i\sqrt{2}) \cdot 0 + i \cdot (-\sqrt{2})) = 0$$

$$\langle v_1 | v_3 \rangle_{\mathbb{C}^3} = \frac{1}{4} (1 \cdot i - i\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + i \cdot 1) = 0$$

$$\langle v_2 | v_3 \rangle = 0 \quad \dots \quad \checkmark$$

①6 Trovare sepsi
autovalori

$$\begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 0 & 1+i \\ -1 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}^1$ hermitiana $\Rightarrow$ sepsi autovalori
 $=$ sepsi $(d_1, d_2/d_1, d_3/d_2)$

$$d_1 = 2 \quad d_2 = -1$$

$$d_3 = -1 + 1 + i + 1 - 2 - 4 = -4$$

$\Rightarrow$ segni autovalori $+, -, +$.

(17) Trovare forma canonica —

$$(a) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = A$$

è ortogonale. Per la teoria: esiste

una M ortogonale t.c.

$${}^t M \cdot A \cdot M = \text{diag. e blocchi}$$

$$\begin{array}{cc} 1 \times 1 & (\pm 1) \\ 2 \times 2 & \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} = R_v \end{array}$$

Oss: Se fosse tutte e blocchi 1×1
 ne avrei comunque due uguali

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon_1 & 0 & \\ 0 & \varepsilon_1 & \\ \hline & & \varepsilon_2 \end{array} \right)$$

è comunque blocco 2×2 di rotazione

$$\Rightarrow \bar{e} \text{ sempre } \left(\begin{array}{cc|c} R_{22} & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \end{array} \right) -$$

Per stabilire se $\bar{e}$ $+1$ o -1 basta $\det A$:

$$\det(A) = \frac{1}{6\sqrt{6}} (2\sqrt{6} + 0 + \sqrt{6} + \sqrt{6} + 0 + 2\sqrt{6}) = +1$$

$$\Rightarrow \text{ho } +1 -$$

Per trovare ψ : osservando che $\ln(A) = \ln \begin{pmatrix} 1 & \psi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$2 \cos \psi + 1$$

$$\Rightarrow \vartheta = \arccos \left(\frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A) - 1) \right)$$

$$= \arccos \left(\frac{1}{2} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \right) -$$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ is symmetric

$$\Rightarrow \exists M \text{ orthop. t.c. } {}^t M A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-3 & 1 & -2 \\ 1 & t & -1 \\ -2 & -1 & t-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= t^3 - 6t^2 + 9t + 2 \\
 &\quad - 4t + 2 \\
 &\quad - t + 3 \\
 &\quad - t + 3
 \end{aligned}$$

$$= t^3 - 6t^2 + 3t + 10$$

$$= (t+1)(t^2 - 7t + 10) = (t+1)(t-2)(t-5)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ antisim.}$$

$$\Rightarrow \exists M \text{ ortog. t.r. } {}^t M A M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & | \\ 1 & 0 & | \\ \hline & & 0 \end{pmatrix}$$

dove gli autovalori di A sono $\pm i1$

$$p_A(t) = \begin{pmatrix} t & -2 & 1 \\ 2 & t & 3 \\ -1 & -3 & t \end{pmatrix} = t^3 + 6 - 6 + t + 6t + 9t = t^3 + 14t = t(t^2 + 14)$$

$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{14}$$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-3i & -1 \end{pmatrix}$ hermitiana

$\Rightarrow \exists M$ unitaria t.c. ${}^t M A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
 $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 &= -12 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -3$$