Geometria 28/5/15

6/7/13 Q6: Trovare parabola con pto a ∞ $[2:1:0]$.

Parabola: luogo $Y = X^2$ con X, Y coord. opportune

Per $Y = X^2$ il pto a ∞ è $X^2 = 0$

cioè $X = 0$ $(Y = 1)$ $\Rightarrow$ $[0:1:0]$

nelle coord X, Y

$\Rightarrow$ Voglio trovare coord X, Y t.c.

$X = 0, Y = 1$ dia $[2 : 1 : 0]$

Prendo

$X = x - 2y$

$Y = y$

$\Rightarrow y = (x - 2y)^2$

va bene qualsiasi funz. affine di x, y purché non del tipo $k(x-2y)+h$

CURVE SEMPLICI?

6/7/13 E2 (A)

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 6t^2 + 9t + 2 \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}$$

semplice?

$$\alpha(t_2) = \alpha(t_1) \overset{?}{\Longrightarrow} t_2 = t_1$$

II comp: $\alpha(t_2) = \alpha(t_1) \Longrightarrow t_2 = \pm t_1$

$t_2 = t_1$ ✓

$$t_2 = -t_1$$

I comp.: $(-t_1)^3 + \cancel{6(-t_1)^2} + 9(-t_1) \cancel{+2}$

$$= t_1^3 + \cancel{6t_1^2} + 9t_1 \cancel{+2}$$

$$\Rightarrow 2(t_1^3 + 9t_1) = 0$$

$$\Rightarrow t_1(t_1^2 + 9) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 0$$

$$\Rightarrow t_2 = -t_1 = 0 = t_1$$

<u>OK</u>

Libro E $\boxed{26}$ 2.(A)

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ t^2 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

semplice?

$$z'(t) = 2 \cdot e^{2t} > 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ z crescente $\Rightarrow$ sì

Libro $\boxed{24}$ E2 (A) $\quad \alpha : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t^2 \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Provare che è semplice e chiusa.

Chiusa: $\alpha(-\pi/2) = \alpha(\pi/2)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \pi^2/4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \pi^2/4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{OK}$$

Semplice e chiusa: gli unici due t_1, t_2 distinti tali che $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ sono gli estremi.

$\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ cioè $\begin{pmatrix} \cos t_1 \\ t_1^2 \\ \sin(2t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t_2 \\ t_2^2 \\ \sin(2t_2) \end{pmatrix}$

$Y(t_1) = Y(t_2) \Longrightarrow t_2 = \pm t_1$. Suppongo $t_2 = -t_1$.

$Z(t_2) = Z(t_1) \Longrightarrow \sin(2t_1) = -\sin(2t_1)$

$\Longrightarrow \sin(2t_1) = 0 \Longrightarrow 2t_1 = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow t_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Dominio di α è $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$

$\Rightarrow \quad t_1 = -\pi/2 \qquad t_2 = \pi/2$ <u>OK</u> estremi

$t_1 = 0 \qquad t_2 = 0$ non distinti.

$t_1 = \pi/2 \qquad t_2 = -\pi/2$ <u>OK</u> estremi.

Libro $\boxed{23}$ 2. (A) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t - \cos t \\ t + 2\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

semplice ?

$$\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \overset{z}{\Longrightarrow} t_2 = -t_1$$

$$\overset{x}{\Longrightarrow} 2 \cdot (-t_1) - \cancel{\cos(-t_1)} = 2t_1 - \cancel{\cos(t_1)}$$

$$\Longrightarrow t_1 = 0 \Longrightarrow t_2 = t_1$$

. Sì .

Esame 28/6/14. Quesiti.

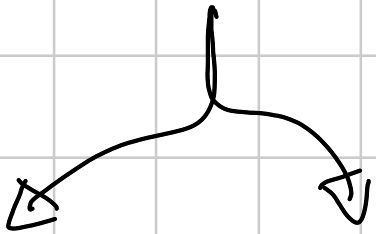
1. $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 1 \text{ equaz. lin.}\}$ $(\dim X = 3)$.
Se $f : X \to X$ lin. ha solo gli autoval. -5 e 7 si conclude che f è diago oppure no?

Se X avesse $\dim = 2$ so che $f : X \to X$ ha 2 autoval. contati con m.a.

Sapendo che sono -5 e 7 concludo che entrambi hanno $m.a. = 1 \Longrightarrow f$ è diago-

Invece $\dim X = 3$. Quindi ho le possibilità:

$m.a.(-5) = 1 \quad m.a(7) = 2$



$m.g.(-5) = 1$

$m.g.(7) = 1$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

non diago

$m.g.(-5) = 1$

$m.g.(7) = 2$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

diago

$$\begin{pmatrix} 7 & & \\ & -5 & 1 \\ & & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & & \\ & -5 & 0 \\ & & -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Non posso dire nulla.

2. Trovare tutti i vett. di $\mathbb{C}^2$ con

(1) unitari (2) $\perp \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ (3) somme coord $\in \mathbb{R}$

---

(3) $\begin{pmatrix} z \\ 1-z \end{pmatrix}$ poi potrò moltiplicare per $k \in \mathbb{R}$

(2) $(3+i)z + (1-2i)(1-z) = 0$

$$z = \frac{1-2i}{1-2i-3-i} = \frac{1-2i}{-2-3i}$$

$$= \frac{(1-2i)(-2+3i)}{4+9} = \frac{4+7i}{13}$$

$$1 - z = \frac{9-7i}{13}$$

(1) $\pm \frac{1}{\sqrt{16+49+81+49}} \begin{pmatrix} 4+7i \\ 9-7i \end{pmatrix}$

3. $[t-1 : 3-t : t+1] = [-2 : 1 : -3]$ pr $t = \dots ?$

$t - 1 = -2$ NO

$$\frac{t-1}{-2} = \frac{3-t}{1}$$

$t - 1 = -6 + 2t$

$t = 5$

Vedo se va bene: $[4 : -2 : 6] \overset{?}{=} [-2 : 1 : -3]$

Sì

4. $2x^2+2(1-t)xy+(t+3)y^2+2\sqrt{5}\,y+2=0$

ellisse per ... ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1-t & 0 \\ 1-t & t+3 & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

$d_1 > 0 \quad \forall t$

$\Longrightarrow$ ho autoval $(+\,?)\,?$

E' ellisse se $(+\,+)\,-$ ovvero se

$d_2 > 0 \quad e \quad d_3 < 0$

$d_2 = 2t + 6 - t^2 + 2t - 1 = -t^2 + 4t + 5$

$d_2 > 0$ se $t^2 - 4t - 5 < 0 \qquad (t-5)(t+1) < 0$

$-1 < t < 5$

$$d_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1-t & 0 \\ 1-t & t+3 & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} =$$

$= 2 \cdot (-t^2 + 4t + 5) - \sqrt{5} \cdot (2\sqrt{5})$

$= -2t^2 + 8t + 10 - 10 = 2t(4-t)$

$d_3 < 0$ se $t(t-4) > 0$ $\quad$ $t < 0 \vee t > 4$

In conclusione:

$$-1 < t < 0 \quad \vee \quad 4 < t < 5$$

5. Classificare $4x^2 - z^2 - 4xy - 2yz + 4x = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$d_2 < 0$ $\quad d_3 = -4+4 = 0$

$\Longrightarrow$ parab. iperb.

Devo vedere che $d_4 \neq 0$:

$$d_4 = \dots = 4$$

$\Longrightarrow$ parab. iperb.

7. $\int_\alpha (2xy\,dx - 5y^2 dy)$

$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \alpha(t) = \begin{pmatrix} 3-t^2 \\ 1-2t \end{pmatrix}$

FORMA

chiuse?
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(-5y^2)}_{=0} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(2xy)}_{=2x}$$

~~no~~

$$\int_0^1 \left(2\cdot(3-t^2)(1-2t)(-2t) - 5(1-2t)^2(-2)\right) dt$$

$$= \dots = \int_0^1 \left(-8t^4 + 4t^3 + 64t^2 - 52t + 10\right) dt$$

$$= -\frac{8}{5} + 1 + \frac{64}{3} - 26 + 10 = \dots$$

Esame 7/6/14. Esercizi

1. $A_k = \begin{pmatrix} 2k-3 & k-1 & 1 \\ k^2-3k+2 & k^2+k & k-1 \\ -2k^2+6k-6 & -2k^2+3k-3 & 2 \end{pmatrix}$

(A) provare che $\det(A_k) = 2k^4+k^3-3k^2-k+1$.

Oss: • Sarrus diretto: No

• Se dopo serve $\det(A_k)$ anche se non ho risolto lo so

III riga $\longrightarrow \mathrm{III} + 2 \cdot \mathrm{II}$

$$\begin{pmatrix} 2k-3 & k-1 & 1 \\ k^2-3k+2 & k^2+k & k-1 \\ -2 & 5k-3 & 2k \end{pmatrix}$$

I col $\longrightarrow \mathrm{I} - \mathrm{II}$

$$\begin{pmatrix} k-2 & k-1 & 1 \\ -4k+2 & k^2+k & k-1 \\ 1-5k & 5k-3 & 2k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4k+2-(k-2)(k-1) & k^2+k-(k-1)(k-1) & k \\ 1-5k-(k-2)2k & 5k-3-(k-1)2k & k \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ conti:

(B) trovare $p_{A_k}(t)$ sapendo $p_{A_k}(-1) = -2k^3(k+2)$

So: $$p_{A_k}(t) = t^3 - \underbrace{tr(A_k)}_{\text{facile}} \cdot t^2 + c_1 \cdot t - \underbrace{det(A_k)}_{\text{lo so dal testo}}$$

$$(-1)^3 - (k^2+3k-1)\cdot(-1)^2 + c_1\cdot(-1)$$

$$-(2k^4+k^3-3k^2-k+1) = -2k^4-4k^3$$

$\Rightarrow$ trovo c_1 . . .

(c) Sapendo che ho $\lambda_1 = k+1$ $\lambda_2 = 2k-1$

trovare λ_3

$$\lambda_3 = tr(A_k) - (\lambda_1+\lambda_2) = k^2+\cancel{3k}-1 \cancel{-k}\cancel{-1} \cancel{-2k} \cancel{+1}$$

$$= k^2-1$$

(D) Trovare le m.a.

$\lambda_1 = \lambda_2$ $\quad k+1 = 2k-1$ $\quad k=2$

$\lambda_1 = \lambda_3$ $\quad k+1 = k^2-1$ $\quad k=-1, \ k=2$

$\lambda_2 = \lambda_3$ $\quad 2k-1 = k^2-1$ $\quad k=2, \ k=0$

Per $k \neq -1, 0, 2$ $\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ con m.a. $= 1$

Per $k = -1$ $\quad$ m.a.$(0) = 2$ $\quad$ m.a$(-3) = 1$

$k = 0$ $\quad$ m.a.$(-1) = 2$ $\quad$ m.a.$(1) = 1$

$k = 2$ $\quad$ m.a.$(3) = 3$

(E) Trovare le m.g. ... $k \neq -1, 0, 2$ m.g. = 1 tutte $\Rightarrow$ diago

$k = -1$ m.g. $(-3) = 1$

può essere 1 o 2

$$m.g.(0) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(0 \cdot I_3 - A_{(-1)}\right)\right)$$

$$= 3 - \mathrm{rank}\left(A_{(-1)} - 0 \cdot I_3\right) = 3 - \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -5 & -2 \\ 6 & 0 \end{matrix}} & 1 \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

$= 1$ Non diago.

$k = 0 \qquad m.g.(1) = 1$

$$m.g.(-1) = 3 - \operatorname{rank}\left(A_0 - (-1) I_3\right)$$

$$= 3 - \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} + I_3\right)$$

$$= 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

diago

$k=2$ $\Rightarrow$ può essere 1, 2, 3

m.g.(3)

$= 3 - \text{rank}\left(A_2 - 3 \cdot I_3 \right) = \ldots = 1$

Non diago

2. $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + \log(1+s^2) \\ 2s - e^s \\ 3s^2 - \sin(s) \end{pmatrix}$

(A) Dominio? $\mathbb{R}$

(B) Regolare: $\alpha'(s) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{2s}{1+s^2} \\ 2 - e^s \\ 6s - \cos(s) \end{pmatrix}$

$X'(s) = 0 \iff 1+s^2+2s = 0 \iff s = -1$

Ora $\gamma'(s) = 2 - e^{-1} \neq 0 \qquad (e \neq 1/2)$

$\Longrightarrow$ regolare

NON SERVE PER FRENET

(c) Frénet in $s=0$

$$\alpha' = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2s}{1+s^2} \\ 2 - e^s \\ 6s - \cos(s) \end{pmatrix} \qquad \alpha'' = \begin{pmatrix} \frac{2-2s^2}{(1+s^2)^2} \\ -e^s \\ 6 + \sin(s) \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\alpha''' = \begin{pmatrix} \frac{-12s+4s^3}{(1+s^2)^3} \\ -e^s \\ \cos(s) \end{pmatrix}}$$

$$\frac{-4s}{(1+s^2)^2} + (2-2s^2)\frac{(-2)\cdot(2s)}{(1+s^2)^3} = \frac{-4s-4s^3-8s+8s^3}{(1+s^2)^3}$$

In O:

$$\alpha' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \alpha'' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \alpha''' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \alpha' \wedge \alpha'' = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{1}{7\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad n = b \wedge t = \frac{1}{7\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$t = n \wedge b$$

$$\Rightarrow n = b \wedge t$$

(D) κ, τ in $s = 0$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'' \mid \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

ATTENZIONE

SONO

NUMERI

(E) $\displaystyle\int_\beta (y\,dx + x\,dy)$ $\qquad \beta = \alpha\Big|_{[0,1]}$

$$= \int_0^1 (2s - e^s)\cdot\left(1 + \frac{2s}{1+s^2}\right) \dots$$

<u>Invece</u>: chiusa? (se sì: esatta)

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = \frac{\partial}{\partial y}(y) \qquad \text{sì}$$

$$\bar{U}(x,y) = x \cdot y$$

$$\Rightarrow \int_\beta \ldots = x \cdot y \Big|_{\alpha(0)}^{\alpha(1)} = x \cdot y \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ * \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} 1+\log 2 \\ 2-e \\ * \end{pmatrix}}$$

$$= (1+\log 2)(2-e)$$