

Geometria 26/3/15

Visto: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simm (o hermitiana)
 $\Rightarrow A$ ha autoval. reali -

Per teorema spettrale basta: ha un autoval. reale -

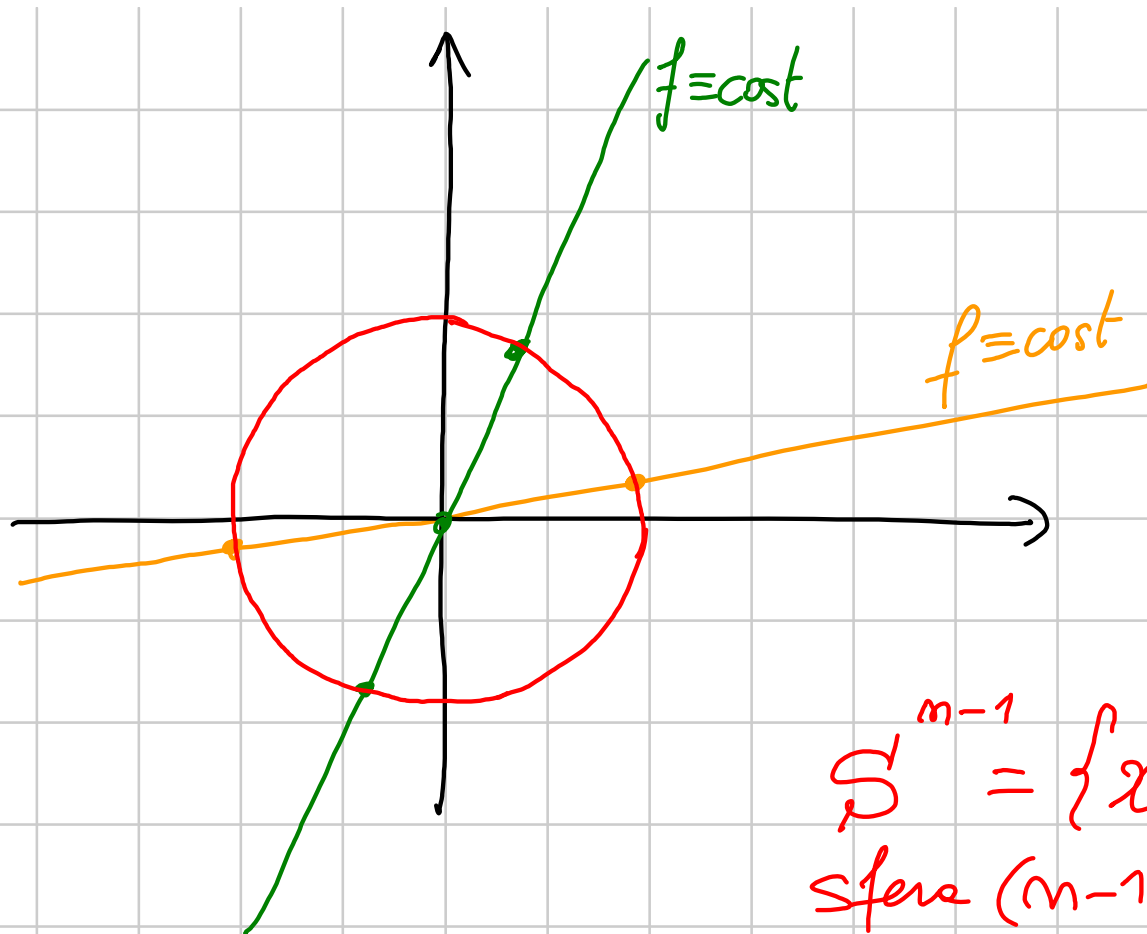
Di un'alternativa di punto fatto via
calcolo differenziale in più variabile -

Fisso $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrico. Definisco:

$$f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{\langle Ax | x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Oss: $f(c \cdot x) = \frac{\langle A \cdot cx | cx \rangle}{\|c \cdot x\|^2} = \frac{c^2 \langle Ax | x \rangle}{c^2 \langle x | x \rangle}$

$$= f(x).$$



$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

sphere $(n-1)$ -dim.

$\Rightarrow$ i valori che f assume su $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ sono
gli stessi che assume su $\mathbb{S}^{m-1}$.

Richiamo: $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

chiuso e limitato

$\Rightarrow g$ ha max e min.

Fatto: $X \subset \mathbb{R}^m$ chiuso e limitato

contiene tutti
i suoi punti limite

contenuto in
qualche palla

$g: X \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\implies g$ ha max e min.

Per noi: S^{n-1} è chiuso e limitato
 $f(x) = \frac{\langle Ax|x \rangle}{\|x\|^2}$ è continua

$\implies f$ ha max e min su S^{n-1}

$\implies f$ ha max e min su $\mathbb{R}^n - \{0\}$

Esercizio: provare che se λ_0 è il max o il min di f su $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ e v_0 è un vettore su cui f vale λ_0 allora λ_0 è autovalore di A e v_0 è un autovettore relativo.

[Non ho ancora usato la simmetria]

Sol:
$$f(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

f ha max o min in $v_0 \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{x=v_0} = 0 \quad \forall k$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\sum_{i,j=1}^m a_{ij} (\delta_{ik} \cdot x_j + x_i \delta_{jk}) \cdot \|x\|^2 - (Ax/x) \cdot 2x_k}{\|x\|^4}$$

$$= \frac{\left(\sum_{j=1}^m a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^m a_{ik} x_i \right) \cdot \|x\|^2 - (Ax/x) \cdot 2x_k}{\|x\|^4}$$

poiché A è simmetrica
sono uguali

$$= \frac{2(A \cdot x)_k \cdot \|x\|^2 - \langle Ax | x \rangle \cdot 2x_k}{\|x\|^4}$$

$$\text{On } \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{x=v_0} = 0 \Rightarrow (A \cdot v_0)_k = \frac{\langle A v_0 | v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} (v_0)_k$$

$$\Rightarrow A \cdot v_0 = \lambda_0 \cdot v_0 \quad \square$$

λ_0

Formule di Taylor II ordine in più var:

In una var :

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} g''(t_0) \cdot (t-t_0)^2 + o\left(\frac{1}{(t-t_0)^2}\right)$$

Inoltre: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ è simmetrico in i, j -

Prop: Se f ha tutte le derivate seconde continue in un aperto che contiene x allora

$$f(x+v) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot v_i \cdot v_j + o(\|v\|^2)$$

(*)

lo riscrivo:

$$\text{grad}(f)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

gradiente

$$H(f)(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1 \dots n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

matrice hessiana

Fatto: è simmetrica $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)$.

Ora Taylor - II dice:

$$f(x+v) = f(x) + \langle \text{grad} f(x) | v \rangle_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2} \langle v | v \rangle_{H(f)(x)} + o(\|v\|^2).$$

"Dilemma" (*) : sto approssimando $f(x+v)$
 con v piccolo, cioè $\|v\|$ piccola.
 Poupò $u = \frac{v}{\|v\|}$ (dunque $\|u\|=1$) e

figgo che u sie costante. Ho

$$f(x+v) = f\left(x + \frac{v}{\|v\|} \cdot \|v\|\right) = f(x + u \cdot \|v\|);$$

se posto $g(t) = f(x + t \cdot u)$ ho

$$f(x+v) = g(\|v\|) = \overbrace{g(0)}^0 + \overbrace{g'(0) \cdot \|v\|}^1 + \overbrace{\frac{1}{2} g''(0) \cdot \|v\|^2 + o(\|v\|^2)}^2$$

Taylor 1 var

Calcoliamo $g'(0)$ e $g''(0)$ -

$$g(t) = f(x + tu) = f \begin{pmatrix} x_1 + tu_1 \\ \vdots \\ x_n + tu_n \end{pmatrix} -$$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + tu) \cdot u_i$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+tu) u_i u_j$$

$$\Rightarrow \text{0: } g(0) = f(x+0 \cdot u) = f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{1: } g'(0) \cdot \|v\| &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \underbrace{u_i \cdot \|v\|}_{v_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i \end{aligned}$$

$$2: \quad \frac{1}{2} g''(0) \|v\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot \underbrace{u_i u_j}_{\text{...}} \|v\|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot v_i \cdot v_j -$$

$$\underbrace{u_i \cdot \|v\|}_{v_i} \cdot \underbrace{u_j \cdot \|v\|}_{v_j}$$

""

Applicaz. del teorema spettrale reale -

① Criteri perché un punto sia di minimo -

In una var:

(N) f ha min in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0, f''(x_0) \geq 0$

(S) $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ ha min. loc. in x_0 -

Prop: (N) Se f ha min. loc. in x allora
 $\text{grad}(f)(x) = 0$ e $H(f)(x)$ ha
tutti gli autovalori ≥ 0 -

(S) Se $\text{grad}(f)(x) = 0$ e $H(f)(x)$ ha tutti
gli autovalori > 0 allora f ha un min. loc. in x

Dim: min loc in $x \Rightarrow \text{grad}(f)(x) = 0$ visto.

Studio $f(x+v)$ nel caso $\text{grad}(f)(x) = 0$ —

Teo spettrale: $H(f)(x)$ è simm

$\Rightarrow \exists M$ ortog. (${}^t M = M^{-1}$) t.c.

$$M^t \cdot H(f)(x) \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} —$$

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} \langle v | v \rangle_{H(f)(x)} + o(\|v\|^2)$$

$$= f(x) + \frac{1}{2} {}^t v \cdot H(f)(x) \cdot v + o(\|v\|^2).$$

Posso $v = M \cdot w$ (isto $w = M^{-1} \cdot v$: for variave
liberamente v equivale a for
variave liberamente w)

$$\Rightarrow f(x+Mw) = f(x) + \frac{1}{2} {}^t w \cdot \underbrace{{}^t \eta \cdot H(f)(x) \cdot M}_{(\lambda_1 \dots \lambda_n)} \cdot w + o(\|w\|^2)$$

$$= f(x) + \underbrace{\lambda_1 w_1^2 + \dots + \lambda_n w_n^2}_{(inv)} + o(\|w\|^2)$$

$$(N) : x \text{ min} \Rightarrow (inv) \geq 0 \quad \forall w \\ \Rightarrow \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$(S) : \lambda_i > 0 \quad \forall i \Rightarrow (inv) > 0 \quad \forall w \neq 0 \\ \Rightarrow x \text{ min} \quad \square$$

② Given A symm. known $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ prod. scal?

Prop: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è prod. scal $\iff A$ è simm. e
ha tutti gli autoval. > 0 .

Dim: $\exists M$ t.c. ${}^t M = M^{-1}$, $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$$\langle v | v \rangle_A = \langle M \cdot w | M \cdot w \rangle_A = \lambda_1 w_1^2 + \dots + \lambda_n w_n^2$$

$\xi > 0 \quad \forall v \neq 0$ i.e. $\forall w \neq 0 \iff$ ogni $\lambda_i > 0$. $\square$

Prop: $\langle . | . \rangle_A$ è prod. scal

$\Leftrightarrow A$ simm e $\det(A_k) > 0 \quad k=1 \dots n$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_k & * \\ \hline * & * \end{array} \right) \Bigg\}_k$$

Dim: $\boxed{\Rightarrow} \langle . | . \rangle_A$ def. pos. su $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ def. pos. la sua restrizione a $\mathbb{R}^k \times \{0\}$:

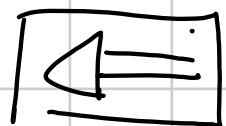
$$\forall y \in \mathbb{R}^k, y \neq 0 \text{ has } \left\langle \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A > 0$$

$${}^t \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t y & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} A_k & * \\ \hline * & * \end{array} \right) \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= {}^t y \cdot A_k \cdot y > 0 \quad \forall y \neq 0$$

$\Rightarrow A_k \text{ def. pos.} \Rightarrow \text{he autovel} > 0$

$$\Rightarrow \det(A_k) > 0$$



Prova per induz. (finita) su k che
 $\langle . | . \rangle_A$ ristretta a $\mathbb{R}^k \times \{0\}$
 $\bar{e}$ def. pos. ; per $k=n$ $\bar{e}$ la tesi.

$$\underbrace{k=1} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle_A = a_{11} \cdot x_1^2 \quad \underline{\text{ok}}$$

$\det(A_1) > 0$

$$\underbrace{k \Rightarrow k+1} : \langle . | . \rangle_A \bar{e} \text{ def. pos. su } \mathbb{R}^k \times \{0\}$$

$\text{e } \det(A_{k+1}) > 0$

Poiché $\det(A_{k+1}) = \text{prodotto dei suoi autov.}$

$\Rightarrow$ o tutti gli autov. sono > 0
(per assurdo) (chunque OK)

oppure ce ne sono almeno due negativi, λ_1, λ_2 .
Per teo spettrale A_{k+1} è diagonale ortog.

$\Rightarrow$ trovo v_1, v_2 ortogonali con $Av_j = \lambda_j v_j$.

Affermo che posto $H = \text{Span}(v_1, v_2)$ ho

$$\langle v|v \rangle_A < 0 \quad \forall v \in H, v \neq 0 : \text{infatti}$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

$$\begin{aligned} \langle v|v \rangle_A &= (\alpha_1^t v_1 + \alpha_2^t v_2) \cdot A (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\ &= (\alpha_1^t v_1 + \alpha_2^t v_2) \cdot (\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2) \\ &= \lambda_1 \cdot \alpha_1^2 + \lambda_2 \cdot \alpha_2^2 \end{aligned}$$

sempre < 0 per $v \neq 0$ poiché $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Dunque ho:

•) $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$ su cui $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ è def. pos.

•) $H \subset \mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$, $\dim H = 2$ su cui $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ è def. neg.

Ma: $\dim(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = k$

$\dim(H) = 2$

$\dim(\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}) = k+1$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap H$

contiene vettori $\neq 0$

Su un dato vettore abnorme

$$\langle v | v \rangle_A > 0$$

$$\langle v | v \rangle_A < 0$$

$$\left(\mathbb{R}^k \times \{0\} \right)$$

$$(H)$$

$\Rightarrow$ Assunto _____



_____ 0 _____

Versione complessa del teorema spettrale _____

Def: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ si dice normale se

$$A^* \cdot A = A \cdot A^*.$$

$(M \in M_{n \times n}(\mathbb{C}))$ è unitaria se

- è isometria
- le colonne sono base ortonorm.
- $M^* \cdot M = I_n$
- $M \cdot M^* = I_n$
- $\exists M^{-1}, M^{-1} = {}^t M$ (Equivalenti -)

Teo: Data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ si ha:

A normale $\iff \exists U$ unitaria che la diagonalizza

$\Leftarrow$ Segue da:

(•) una diagonale $\bar{e}$ normale: $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$D^* \cdot D = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \\ & \ddots \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot D^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \\ & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

(..) Se B é normal e N é unitária, então $N^{-1} \cdot B \cdot N$ é normal;

$$(N^{-1} \cdot B \cdot N)^* \cdot (N^{-1} \cdot B \cdot N) \stackrel{?}{=} (N^{-1} \cdot B \cdot N) \cdot (N^{-1} \cdot B \cdot N)^*$$

$$\underbrace{N^* \cdot B \cdot \underbrace{N \cdot N^*}_{I_n}}_{\text{In}} \quad \underbrace{N^* \cdot B^* \cdot \underbrace{N \cdot N^*}_{I_n}}_{\text{In}}$$

⌊ ipoli perché B è normale
 $\Rightarrow$ ok.

Dimo, $\Rightarrow$; Ho A normale.

Prendo autovalore λ_1 , autovettore v_1 unitario
e completo e base $(v_1, \dots, v_m)$ ortonormale -
Ho $M = (v_1, \dots, v_m)$ unitaria e

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_1 \end{pmatrix}$$

$P_n(\dots)$ la $\begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t y \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ normale

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t y \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}^*}_{//} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t y \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}}_{//} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t y \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t y \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}^*$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 \\ \overline{{}^t y} & A_1^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t y \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t y \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 \\ \overline{{}^t y} & A_1^* \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \dots \\ \vdots & \boxed{} \end{pmatrix}}_{//}$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 + \|y\|^2 & \dots \\ \vdots & \boxed{} \end{pmatrix}$$

Posto (1,1) $\Rightarrow y=0$

Nei $\square$: $A_1^* \cdot A_1 = A_1 \cdot A_1^*$ _

Trovato M_1 unitaria t.c

$$M_1^{-1} \cdot A \cdot M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

con $A_1^* \cdot A_1 = A_1 \cdot A_1^*$ cioè A_1 normale
(n-1) x (n-1)

Ittrando conclude _



Esempio: Stabilire quali $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$
sono normali _

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Normale se: $\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{z} \\ \bar{y} & \bar{w} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{z} \\ \bar{y} & \bar{w} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} |x|^2 + |z|^2 = |x|^2 + |y|^2 \\ \bar{x}y + \bar{z}w = x\bar{z} + y\bar{w} \\ \bar{y}x + \bar{w}z = z\bar{x} + w\bar{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}y + \bar{z}w = x\bar{z} + y\bar{w} \\ \bar{y}x + \bar{w}z = z\bar{x} + w\bar{y} \end{cases}$$

← coniugate della II

$$\cancel{|y|^2 + |w|^2} = \cancel{|z|^2 + |w|^2} \leftarrow \text{uguale alla I}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ normale} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = |z| \\ z\bar{y} + z\bar{w} = z\bar{x} + w\bar{y} \end{cases}$$

($\Rightarrow$) moltissime matrici non sono normali -

Esempi di matrici normali:

- simmetriche reali $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), {}^t A = A$

• antisimmetrici reali $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, ${}^t A = -A$

• hermitiane $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $A^* = A$

• antihermitiane $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $A^* = -A$

• ortogonali reali $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, ${}^t M = M^{-1}$

• unitarie $M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $M^* = M^{-1}$