

Geometria 25/3/15

V sp. vett. su K , $\dim_K V = n$

$f: V \rightarrow V$ lin.

$\lambda \in K$ autovale se $\exists v \neq 0$ (autovettore) l.c. $f(v) = \lambda \cdot v$.

Speranza: diagonalizzare f , cioè trovare
base di V di autovettori di f .

$p_f(t) = \det(t \cdot \text{id} - f)$ polinomio caratteristico

Prop: λ autovd. di $f \iff p_f(\lambda) = 0$

$$\bullet) p_f(t) = t^n - \text{tr}(f) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f).$$

Con: se $p_f(t)$ ha radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con molteplicità $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{tr}(f)$, $\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det(f)$.

$$p_f(t) = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n) = t^n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) t^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Es: $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1, \lambda_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -15$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$$

Es: dato $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ con $\text{tr}(A) = 7$,
 $\det(A) = -4$, trovare $P_A(t)$ sapendo che
 $P_A(-1) = 5$

$$\text{Sol: so che } p_A(t) = t^3 - 7t^2 + c.t + 4$$

$$-1 - 7 - c + 4 = 5 \Rightarrow c = -9$$

$$\Rightarrow P_A(t) = t^3 - 7t^2 - 9t + 4$$

Esempio: Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ ha un solo autovettore $\vec{v}$ con molteplicità n allora
 A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow A$ è già diagonale.

$\Leftarrow$: ovvio.

$$\Rightarrow: \exists M \text{ t.c. } M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{cioè } M^{-1} \cdot A \cdot M = \lambda \cdot I_n$$

$$\Rightarrow A = M \cdot \lambda \cdot I_n \cdot M^{-1} = \lambda \cdot M \cdot M^{-1} = \lambda \cdot I_n.$$

Dunque $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ha pol. car.

$$\det \begin{pmatrix} t-3 & -7 \\ 0 & t-3 \end{pmatrix} = (t-3)^2$$

$\Rightarrow$ ha il solo autovettore 3

non è diagonale dunque non è diagonalizzabile -

Prop: se f ha autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$
distinti allora f è diagonalizzabile -

Dimo: sia $v_j \neq 0$ un autovettore relativo a λ_j ,
cioè $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j$ - Affermo che $v_1, \dots, v_n$
sono base (il che baste) - Lo provo verificando

per induzione ^{finita} che $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indep.
per $k=1, \dots, n$ —

$$k=1, \quad v_1 \neq 0 \quad \underline{ok}.$$

Supponiamo $v_1, \dots, v_k$ lin. indep. —

Devo vedere che $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ lo sono —

Se non lo fossero avrei

$$v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \quad (*)$$

$$\lambda_{k+1} \cdot (*)$$

$$f(*)$$

$$= (\lambda_{k+1} \cdot v_{k+1} = \lambda_{k+1} \cdot \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_{k+1} \cdot \alpha_k v_k)$$

$$0 = \underbrace{\alpha_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1)}_{\neq 0} v_1 + \dots + \underbrace{\alpha_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k)}_{\neq 0} v_k$$

Ipotesi: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinti

Ipotesi induttiva: $v_1, \dots, v_k$ lin. indep.

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

$$\Rightarrow V_{k+1} = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k = 0$$

$$\text{assumo : } V_{k+1} \neq 0 \quad \square$$

$$\underline{\text{Es:}} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 9 & -4 & 9 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-3 & -2 & -5 \\ -9 & t+4 & -9 \\ -2 & 2 & t \end{pmatrix}$$

$$= t^3 + t^2 - 12t - 36$$

$$-10t + 90$$

$$-18t - 40$$

$$+18t - 54$$

$$= t^3 + t^2 - 22t - 40$$

Ricordo: dato $q(t) = m_n \cdot t^n + m_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + m_0$
con $m_i \in \mathbb{Z}$, se $q(t)$ ha una radice
razionale allora $\bar{t}$ è del tipo k/h
con k divisore di m_0 e h divisore di m_n —

Per $P_A(t)$ possibili radici razionali sono intere perché è monico, e sono i divisori di -40 , cioè $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40$ -

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{No}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{-2 = 1,}$

$$t^3 + t^2 - 22t - 40 = (t + 2)(t^2 - t - 20)$$

$$\lambda_{2,3} = \dots \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$$

Poiché A ha 3 autov. distinti
è diagonalizzabile -

Base che diagonalizza:

$$V_1: \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 9 & -4 & 9 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y + 5z = 0 \\ 9x - 2y + 9z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 : \begin{cases} -2x + 2y + 5z = 0 \\ 9x - 9y + 9z = 0 \\ 2x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_3 \dots$

Oss: se $K = \mathbb{R}$ se $p_f(t)$ ha qualche radice non reale allora f non è diagonalizzabile.

$$\underline{\text{Es}} : A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1$$

su $\mathbb{R}$ non ha radici (su $\mathbb{C}$ ha $\pm i$)

$\Rightarrow$ A non è diag. su $\mathbb{R}$

(cioè $\nexists M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M = \text{diag}$)

Ma su $\mathbb{C}$ ha aut. dist. $\pm i$

$\Rightarrow$ A è diag su $\mathbb{C}$

cioè $\exists M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \text{ t.c. } M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Oss: se f è diagonalizzabile, in una
 $[f]_{\mathcal{B}}$ diagonale ci sono gli autovalori
 sulla Diago:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \lambda_j & \dots \end{pmatrix} \leftarrow j \quad f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j$$

Oss. permutando gli elementi di B si
realizza qualsiasi permutazione dei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Q: come decidere sulla diagonalizzabilità se
le radici di $P_f(t)$ sono tutte in K e
non sono né tutte distinte né tutte uguali.

Def: se λ è autovettore di f chiamiamo
• molteplicità algebrica di λ la sua molt.

come radice di $p_f(t)$

(cioè: il più grande h t.c. $(t-1)^h$
divide $p_f(t)$ — non "quante volte λ
è radice di $p_f(t)$ ")

- molteplicità geometrica di λ

$$\dim(\text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f))$$

$$= \dim \{ v : f(v) = \lambda \cdot v \}$$

autospazio relativo a λ

Oss. $1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$

Giustifichi se $m.g.(\lambda) = l$ allora esiste
 una base $v_1, \dots, v_l$ di $\text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$;
 se la completa a base B di V ho

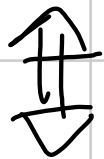
$$[f]_B = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda \cdot I_l & | & C \\ \hline 0 & | & B \end{pmatrix}}_l$$

$$\Rightarrow P_f(t) = \det(t \cdot I_m - [f]_B) = (t - \lambda)^l \cdot P_B(t)$$

$$\Rightarrow m.a.(\lambda) \geq l$$

($l \geq 1$: def. autovettore) —

Teo: $f: V \rightarrow V$ ($\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$)
è diagonalizzabile



(•) $P_f(t)$ ha n radici in $\mathbb{K}$
contate con la molteplicità

(••) per ogni radice λ di $P_f(t)$
si ha $m.g(\lambda) = m.a.(\lambda)$.

Ricetta per vedere se f è diagonalizzabile:

I - calcolo $p_f(t)$ (se $f = A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ o $f, \mathbb{R}$
se no prima trovare $[f]_{\mathbb{R}}$)

II - $\begin{cases} \rightarrow \text{su } \mathbb{C}, \text{ solto} \\ \rightarrow \text{su } \mathbb{R}, \text{ verifico che le radici di } p_f(t) \\ \text{ siano tutte in } \mathbb{R} \end{cases}$

III - verifico che per tutte le radici λ di $p_f(t)$ con $m.a.(\lambda) > 1$ si abbia $m.g.(\lambda) = m.a.(\lambda)$ -

"Dimo" (Teo) -

↓ : (•) visto

$$(\bullet) [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} =$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 \dots \lambda_1 & & \\ \hline & \lambda_2 \dots \lambda_2 & \\ \hline & & \lambda_3 \dots \end{array} \right) \begin{array}{l} \} m_1 \\ \\ \} m_2 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m_2}$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$ si ottiene

due gli autovalori sono $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ e
 $m.a.(\lambda_j) = m.g.(\lambda_j) = m_j$ -

$\Uparrow$: Abbiamo autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$
e se $m_j = m.g.(\lambda_j)$ abbiamo

$$m_1 + \dots + m_k = \deg(p_f(t)) = n$$

$\Rightarrow$ Scegliendo base $(v_i^{(j)})_{i=1 \dots m_j}$

di $\text{Ker}(\lambda_j \cdot \text{id}_V - f)$ abbiamo

$(V_i^{(j)})_{\substack{j=1 \dots k \\ i=1 \dots m_j}}$ sono n vettori
($n = \dim V$)

Come sopra nel caso di autovalori distinti
posso verificare che sono lin. indep.

$\Rightarrow$ sono base

$\Rightarrow \exists$ base di autovettori. $\square$

Teorema (spettrale — versione reale) :

↳ come la decomposizione
della luce bianca nei colori

Una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica
ammette una base ortonormale di autovettori
(e viceversa).

Ricordo: A simm. se ${}^t A = A$

Ricordo: $(v_1, \dots, v_m)$ base ortonormale se e solo se
 $M = (v_1 \dots v_m)$ è ortogonale cioè $\bar{c}$

$${}^t M \cdot M = I_m \iff M \cdot {}^t M = I_m$$

$$\iff \exists M^{-1} \text{ e } M^{-1} = {}^t M$$

Teo spettrale: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$${}^t A = A \iff \exists M \text{ t.c. } {}^t M = M^{-1} \text{ e } M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

"si diagonalizza tramite una M ortogonale"

Leu 1: B simm, N ortogonale

$\Rightarrow N^{-1} \cdot B \cdot N$ è simmetrica -

Dim:
$${}^t(N^{-1} \cdot B \cdot N) = {}^t({}^t N \cdot B \cdot N)$$

$$= {}^t N \cdot {}^t B \cdot N = N^{-1} \cdot B \cdot N \quad \square$$

Dimo $\Leftarrow$ Teo: $A = M^{-1} \cdot D \cdot M$ (D diagon
 $\Rightarrow$ simmetrica)

$\Rightarrow$ Lemma 1: A simmetrica $\square$

Lemma 2: Ogni $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ hermitiana
 $(A^* = A)$
 ha autovalori reali.

(Si applica ad $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica
(${}^t A = A$) -)

Dim: Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore
 $v \in \mathbb{C}^n$ autovettore relativo, $v \neq 0$ -

$$\langle Av | v \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda v | v \rangle = \lambda \cdot \|v\|^2$$

$$\parallel$$
$$\langle v | Av \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle v | \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \cdot \|v\|^2$$

$$\|v\| \neq 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Dim ($\Rightarrow$ Tes): A simmetria.

Lemma: tutti autov. reali.

Ne scelgo uno, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e autovettore v_1 relativo. Normalizzandolo, suppongo $\|v_1\| = 1$.

Completo a base $(v_1, \dots, v_m)$ ortonormale,
cioè $M_1 = (v_1 \dots v_m)$ è ortogonale.

One: $M_1^{-1} \cdot A \cdot M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & n \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$

perché v_1 è autovett. rel. a λ_1 .

Lemma $\Rightarrow M_1^{-1} \cdot A \cdot M_1$ è simm

$\Rightarrow n=0$, A_1 è simmetrica

$\Rightarrow M_1^{-1} \cdot A \cdot M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$

$A_1 \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{R})$ simmetrica -

Iterando il procedimento (per induzione)
concludo che esiste M ortogonale t.c.

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \square$$

Esercizio: se $M, N \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
sono ortogonali allora $M \cdot N$ lo è.

Algebra: ...

Giannicola: "ortogonale" = "isometrie"
"prodotto" = "composizione"

+ ovvio che la composizione di
due isometrie è isometria.