

Geometria 23/4/15

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \begin{array}{l} x \sim y \\ \text{se } y = \lambda \cdot x \end{array} = \text{l'insieme delle rette} \\ \text{in } \mathbb{R}^{n+1}$$

Coordinate omogenee: $[x] = [x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}]$

Def: chiamo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

un insieme $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che è proiezione di $W \setminus \{0\}$,
con W un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Ovvero : un sottoinsieme definito da
equazioni omogenee di I grado $-$

Se $\dim W = k+1$ dico che $\dim X = k$ $-$

Se $k=1$ dico X rette proiettive

$k=2$ " X piano "

$k=n-1$ " X iperpiano " $-$

Es: per due punti distinti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
passa una e una sola retta proiettiva.

Infatti se $[x] \neq [y]$ ho $y \notin \mathbb{R} \cdot x$
cioè x, y sono lin. indep. $\Rightarrow W = \text{Span}(x, y)$
ha $\dim = 2$; la proiezione in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
di W è la retta che passa per $[x]$ e $[y]$.

Es: rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ visto come
 $\mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}_{\rightarrow \text{i punti all' } \infty}$.

- $\{x_3 = 0\} = \{[x_1 : x_2 : 0] : x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$
 è la retta all'infinito.

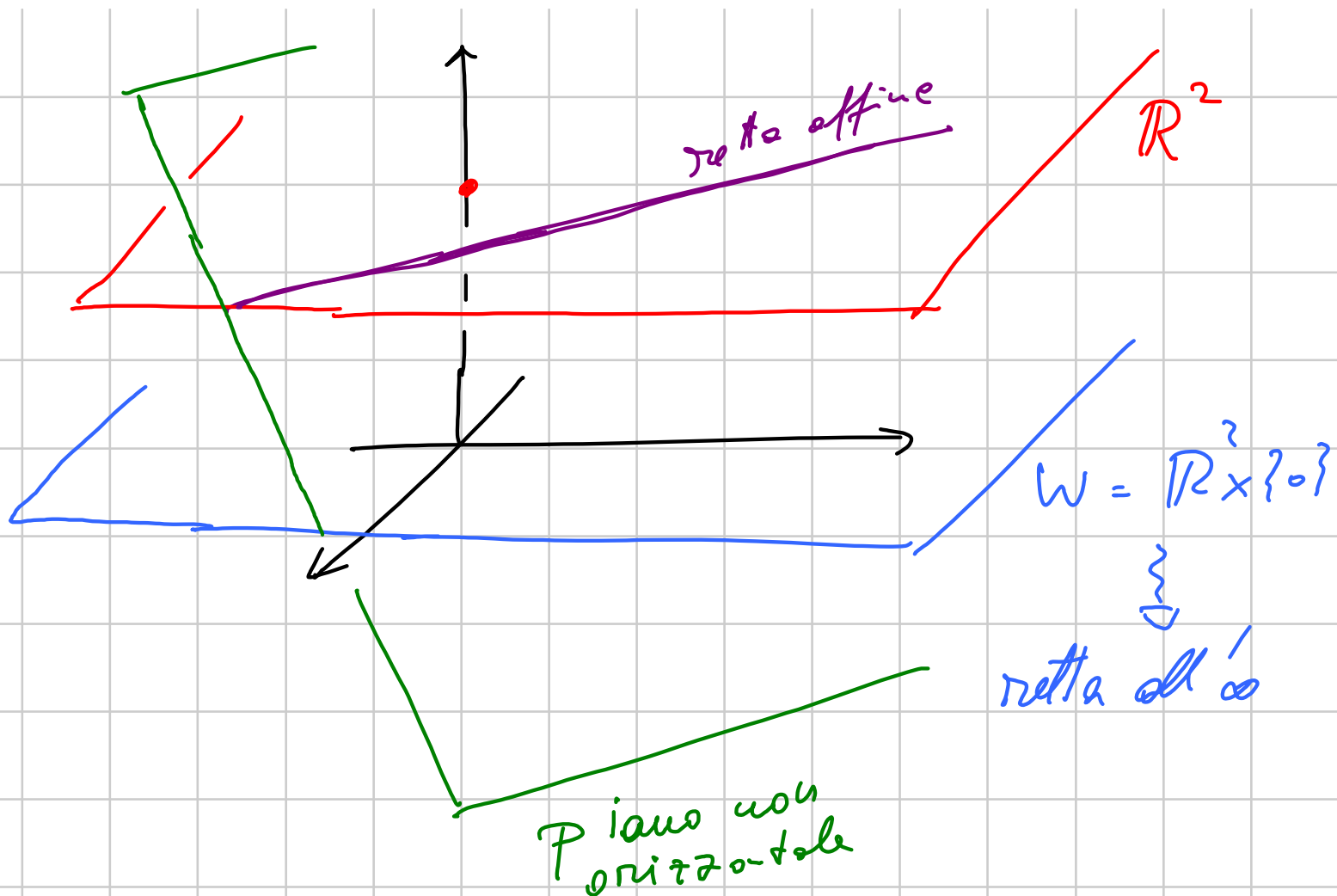
- Se ho equazione $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$

con a_1 o a_2 non nulli:

- intersezione con $\mathbb{R}^2$, $x_3 = 1$, è
 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0 \Rightarrow$ una retta affine

- all'infinito, $x_3 = 0$, ho $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$

è il punto all'infinito delle rette affini precedenti.



Ho visto che le rette proiettive di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono:

- la retta all'infinito
- le rette affini completate con il loro pto all'infinito.

Oss: Se $l_1, l_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono rette distinte
allora $l_1 \cap l_2$ è sempre un punto.

Infatti l_j è proiezione di $W_j \setminus \{0\}$ con
 $\dim W_j = 2$, $W_j \subset \mathbb{R}^3$ piano

$\Rightarrow W_1 \cap W_2$ ha $\dim = 1$

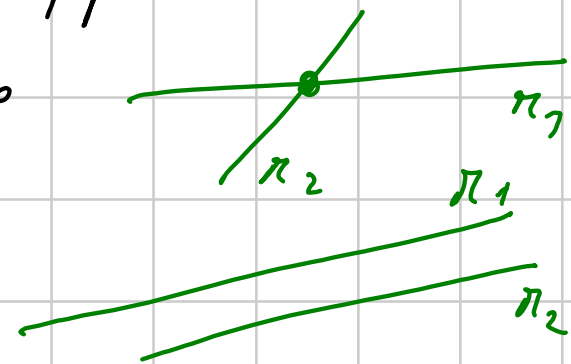
(sono due piani distinti per O in $\mathbb{R}^3$)
 $\Rightarrow$ la proiezz. di $W_1 \cap W_2 \setminus \{O\}$ è
il punto di intersezione di l_1 e l_2 .

Se l_1 e l_2 non sono le rette all' ∞ ho
 $l_j = \pi_j \cup (\text{il suo punto all}'\infty)$

con π_j retta affine di $\mathbb{P}^2$
 al finito

$l_1 \cap l_2 = \text{pto}$

all'infinito



Ciò prova che:

due rette affini distinte di $\mathbb{R}^2$ (pensate come rette proiettive) si intersecano sempre in un punto, che è all'∞ se sono parallele —



« Quanto appena visto suggerisce che quando si considera

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})}_{\text{punti all'∞}}$$

si ha che $\mathbb{R}^n$ è lo spazio affine $\mathbb{R}^n$
(non lo spazio vettoriale). »

Cambi di coordinate naturali

- Su $\mathbb{R}^n$ spazio vettoriale sono

$$x' = M \cdot x \quad \text{con} \quad M \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ \text{invertibile}$$

- Su $\mathbb{R}^m$ spazio affine sono

$$x' = M \cdot x + v \quad \text{con } M \in M_{m \times m}(\mathbb{R}) \\ \text{invertibile, } v \in \mathbb{R}^m$$

- Su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{m+1})$ sono

$$[x'] = [N \cdot x] \quad \text{con } N \in M_{(m+1) \times (m+1)}(\mathbb{R}) \\ \text{invertibile}$$

One $\mathbb{R}^m$ si può vedere come sottoinsieme
di $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ di equazione $x_{m+1} = 1$
 $\Rightarrow$ possiamo vedere quali cambi di coordinate
 $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ induce su $\mathbb{R}^m$;

Sia $N \in M_{(m+1) \times (m+1)}(\mathbb{R})$ - Ci chiediamo
quando trasforma $\mathbb{R}^m$ in sé, cioè quando
manda i pti al finito in pti al finito;
equivalentemente quando manda i pti all' ∞
in pti all' ∞ , ovvero quando eccate che

$$N(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = \mathbb{R}^m \times \{0\} -$$

Scrivo $N = \left(\underbrace{\begin{matrix} M \\ -t_w \end{matrix}}_m \mid \underbrace{\begin{matrix} v \\ c \end{matrix}}_1 \right) \begin{matrix} \}^m \\ \}_1 \end{matrix}$; voglio

$$N \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} M \cdot x \\ t_w \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

accade $\iff w=0 -$

$\Rightarrow$ vanno bene le $N = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & c \end{pmatrix}$ -

Nota ora che N e $\lambda \cdot N \quad \forall \lambda \neq 0$ danno
le stesse transf. di $\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ posso
sostituire N con $\frac{1}{c} \cdot N \quad (c \neq 0)$

$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ -

Riassumendo:

i cambi di coord. in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che preservano la parte $\mathbb{R}^m$ al finito sono esattamente quelli del tipo $N = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Effetto di $N = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ su $\mathbb{R}^m$ è

$$\begin{array}{ccccccc}
 x & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mx+v \\ 1 \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & Mx+v \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbb{R}^m & & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ le trasf. di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che preservano $\mathbb{R}^n$
sono le trasf. affini —

Proposito: classificare i luoghi in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
o $\mathbb{R}^n$ definiti da equazioni di II grado
(omogenee in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, non in $\mathbb{R}^n$) a
meno di trasformazioni naturali (lineari
in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, affini in $\mathbb{R}^n$) —

$$\boxed{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$$

Eq. Il grado omogeneo in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è

$${}^t y \cdot A \cdot y = 0$$

$$A \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R}) \text{ simmetrica .}$$

Effetto di cambio di coordinate $y' = N' \cdot y$,
ovvero $y = N \cdot y'$ con $N = (N')^{-1}$:

$${}^t y' \cdot \underbrace{({}^t N \cdot A \cdot N)}_{A'} \cdot y = 0 \quad -$$

Effetto: sostituire A con ${}^t N \cdot A \cdot N$ -

Fatto: con tale sostituzione non cambia
il numero di autovalori positivi di A , né
quello di autovalori negativi -

Rapimento (provalo in audiolive con te

caratterizzazione delle matrici def. pos):

$$\left(\begin{array}{l} \text{numero di autovalori} > 0 \\ \text{di } A \text{ simmetrica} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{massima dimensione di} \\ \text{sottospazio } W \text{ t.c.} \\ \langle \cdot | \cdot \rangle_A \text{ è def. pos. su } W \end{array} \right)$$

Oss: il luogo definito dall'equazione ${}^t y \cdot A \cdot y = 0$
è lo stesso definito da ${}^t y \cdot (-A) \cdot y = 0$
 $\Rightarrow$ posso cambiare segno ad A -

Def: chiamo non dipendere il luogo
 $\{y: {}^t y \cdot A \cdot y = 0\}$ se $\det A \neq 0$ -

Prop: A meno di cambi di coordinate proiettivi
i luoghi del tipo $\{y \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : {}^t y \cdot A \cdot y = 0\}$
sono precisamente quelli di equazioni

$$y_1^2 + \dots + y_p^2 = y_{p+1}^2 + \dots + y_{p+q}^2$$

con $p \geq q$ -

Cioè: dato un luogo $L = \{y: {}^t y \cdot A \cdot y = 0\}$
 esiste sempre una trasformaz. proiettiva N t.c.
 $N(L)$ è uno e uno solo dei luoghi.
 ↳ equat. $y_1^2 + \dots + y_r^2 = y_{r+1}^2 + \dots + y_{r+s}^2$ —

↑
 modelli proiettivi —

Dim: So che A è diago via ortogonale B —
 Supponiamo che abbia autovalori

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$$

$$\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} < 0$$

altri nulli;

$${}^t B \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{p+q} & \\ & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

cambio coord.
proiettivo

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1/\sqrt{-\lambda_{p+1}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \dots \end{pmatrix} \cdot {}^t B A B \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1/\sqrt{-\lambda_{p+1}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} =$$

cambio coord. proiett.

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ \hline & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} p \\ \} q \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_p \quad \underbrace{\hspace{10em}}_q$

$$\Rightarrow \text{ho trovato } y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2 = 0$$

Se $p < q$ cambio segno e trovo $p \geq q$. $\square$

Oss: L non degenere $\iff p+q=n+1$.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ coniche proiettive.

$$A \in \mathbb{M}_{3 \times 3} : \binom{\text{autval}}{pos} + \binom{\text{autval}}{neg} + \binom{\text{autval}}{0} = 3$$

$\geq$

non deg: $(3+0+0) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad \emptyset$

$$(2+1+0)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$$

l'unica conica
non deg. non $\emptyset$

deg

$$(2+0+0)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad [0:0:1]$$

un punto

$$(1+1+0)$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$\{[1:1:t] : t \in \mathbb{R}\} \\ \cup [0:0:1]$$

$$\{[1:-1:t] : t \in \mathbb{R}\} \\ \cup [0:0:1]$$

due rette

$$(1+0+0)$$

$$x_1^2 = 0$$

una retta —

$\mathbb{R}^M$
affine

Equazione di II grado:

$${}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix}$$

$$(n+1) \times (n+1)$$

simmetrica

Effetto di un cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto N \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x \mapsto Mx + v)$$

Effetto su $A \in Q$:

$${}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto N \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = {}^t N \cdot A \cdot N$$

$${}^t \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t M & 0 \\ {}^t v & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q M & Q v + e \\ {}^t l \cdot M & {}^t l v + c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t M \cdot Q \cdot M & * \\ * & * \end{pmatrix} \Rightarrow Q' = {}^t M \cdot Q \cdot M$$

$\Rightarrow$ Eseguendo cambi di coordinate affini non cambiano i numeri di autovalori pos e neg né per A né per Q .

Vediamo (per $n=2,3$) il viceversa:

i segni degli autovalori di A e Q determinano a meno di infinito il luogo definito dall'espressione —

Oss: cambiando il segno dell'equazione cambiano tutti i segni degli autovalori.

Teo (classificazione affine delle coniche non deg):

$$\text{Sia } \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : {}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

con $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ simm. e $\det(A) \neq 0$.
Sia $d_j = \det$ (sottomatrici $j \times j$ in alto a sx);
allora A è :

$\emptyset$ se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$
ellisse se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$
iperbole se $d_2 < 0$
parabola se $d_2 = 0$ -

"è" : esiste una trasformazione affine N
t.c. $N(L)$ è definito da una delle

equazioni canoniche :

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$\emptyset$ $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$
 ellisse $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$
 iperbola $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$
 parabola $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & -1/2 \\ & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Oss : interpretazione intrinseca dei casi :

$A = \begin{pmatrix} Q & l \\ +l & c \end{pmatrix}$
 $d_2 > 0$ autovettori di Q sono concordi
 $d_2 < 0$ autovel. Q discordi
 $d_2 = 0$ Q ha un autovel 0

Nota che se cambio segno dell'equazione

- d_2 non cambia
- d_1, d_3 cambiano segno $\Rightarrow d_1 \cdot d_3$ non cambia -

Nel caso $d_2 > 0$ segno $d_1 \cdot d_3$ si infolge:
~~posso~~ supporre $d_1 > 0 \Rightarrow$ autoval $\lambda_i \in \mathbb{Q}$
siano positivi

$d_1, d_3 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

gli autovalori di A sono tutti
 concordi (con quelli di Q)

gli aut. di A sono discordi.
 (due come quelli di Q , uno
 diverso)

Dimo: Provo intanto che Q non può avere
 entrambi gli autovalori nulli; se così fosse
 sarebbe $Q = 0$ cioè

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

tole A ha $\det = 0 \Rightarrow \underline{NO}$

Usando il teorema spettrale + isolando
le coordinate + cambio segno equiv. si serve,
come nel caso positivo con cambi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
mi riconduco:

$$d_2 > 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & l_2 \\ l_1 & l_2 & c \end{pmatrix}$$

$$d_2 < 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & l_1 \\ 0 & -1 & l_2 \\ l_1 & l_2 & c \end{pmatrix}$$

$$d_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & l_2 \\ l_1 & l_2 & c \end{pmatrix}$$

Una traslo: $\begin{pmatrix} I_2 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ t_v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & l \\ t_l & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ t_v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & Qv+l \\ t_l & t_l.v+c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q & Qv+l \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Se Q è invertibile scelgo $v = -Q^{-1} \cdot l$

$$\Rightarrow Qv+l=0$$

Dunque per $d_2 \neq 0$
mi riconduco a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

riscolo le coordinate con $\sqrt{|c|}$ e divido
per $|c|$ e trovo

$$d_2 > 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$$



dipende da $d_1 \cdot d_3$

$$d_2 < 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$$



equat. canoniche di
D ed ellisse

se necessario cambio
segno e scambio x/y

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

eq. canonica iperbole

Per $d_2=0$ come sopra con tre sost. nei
si conducono a ;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow x_1^2 + 2bx_2 + c = 0$$

$$\text{Posto } \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -(2bx_2 + c) \end{cases}$$

trova

$$x_2 = x_1^2$$

eq. canonica
parabola

