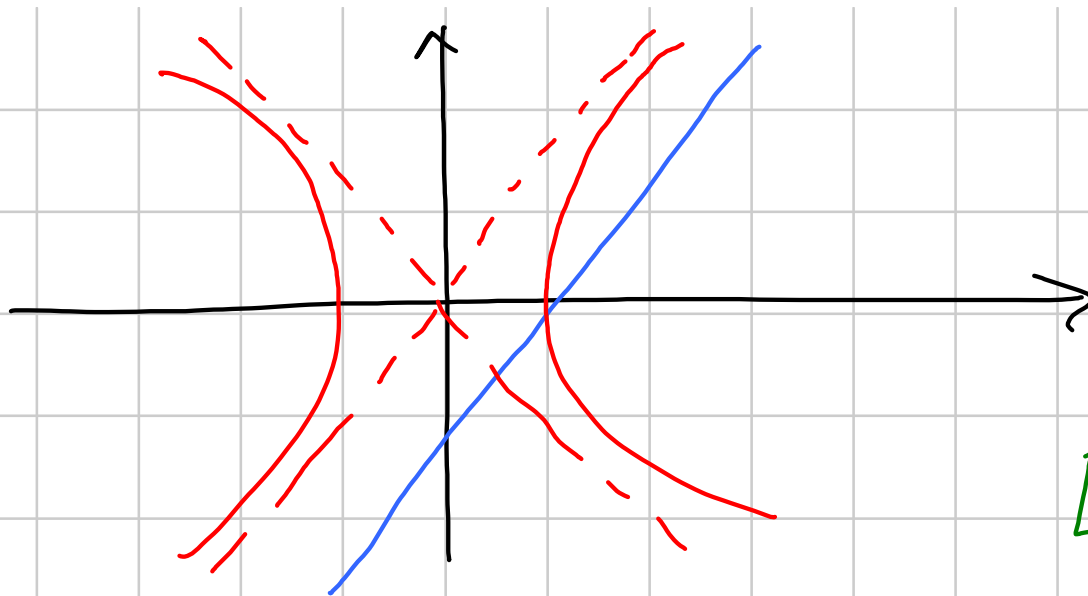


Geometria 20/5/15

Foglio 27/4

(10) Pti all'∞ di $\{(x,y): \underline{x^3+y^3-x^2y-xy^2-x+y+1=0}\}$ -

Equaz: $\underline{(x-y+1)} \underline{(x^2-y^2-1)} = 0$ -



$$[1:1] = [1:1:0]$$

$$[1:\pm 1] = \\ = [1:\pm 1:0]$$

$$[1:\pm 1]$$

Oppure : $\frac{L}{L}$ luogo def. da equaz. in $\mathbb{R}^2$
 def. da stessa equaz. - una o due
 appiungendo?

$$L_{\infty} = \overline{L} \cap \{z=0\}$$

$\Rightarrow L_{\infty}$ è definito solo dalla parte di grado max dell'equaz. di L :

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 0$$

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y) = 0$$

$$(x+y)(x-y)^2 = 0$$

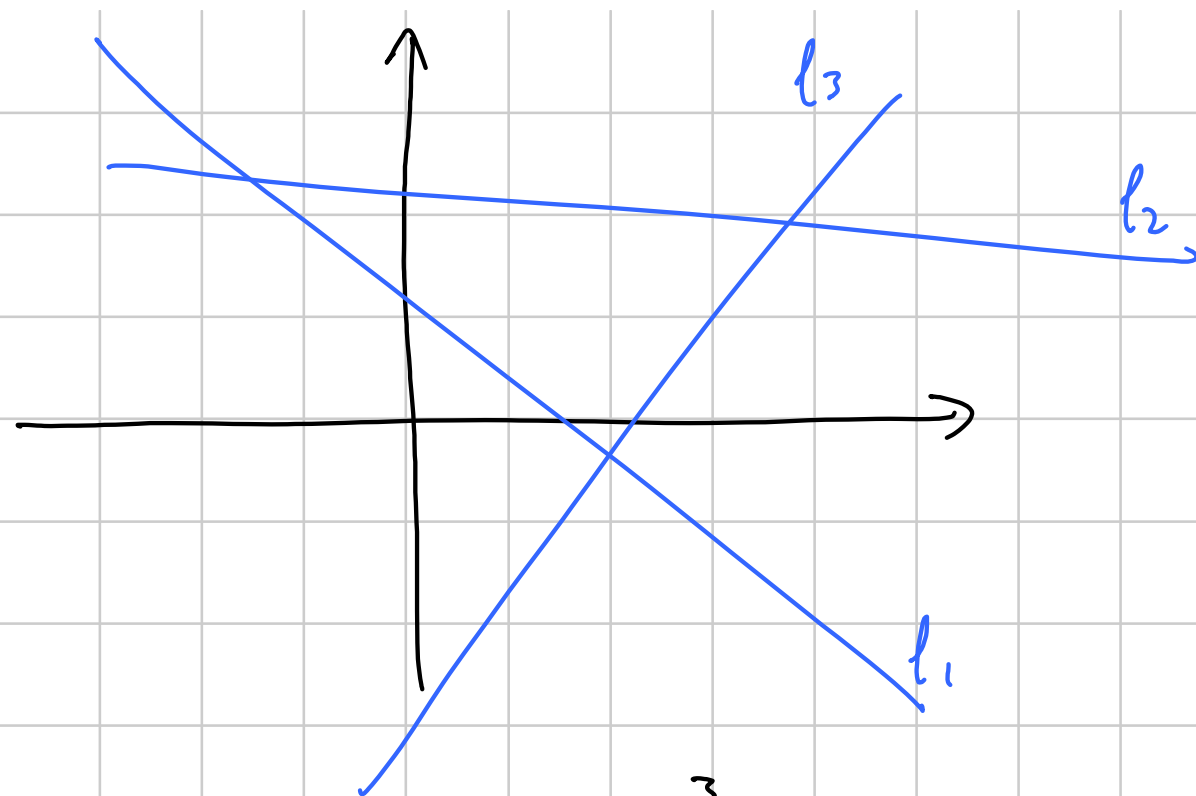
$$\Rightarrow \begin{matrix} [1 : -1] \\ [1 : 1] \end{matrix} = [54\sqrt{\pi} : -54\sqrt{\pi}]$$

(doppio)



logico: è pto all'∞ sia di
iperbole sia di retta -

⑪ Trovare XCTR² def. da equez. di grado 3
che abbia 3 pti all'∞ e non coincidenti.



$$l_j: a_j x + b_j y + c_j = 0$$

Union sette :

$$\bigcap_{j=1}^3 (a_j x + b_j y + c_j) = 0.$$

grado 3 ✓

3 pt all'∞ ✓

Pero' contiene rotte - Basta mettere:

$$\prod_{i=1}^3 (a_i x + b_i y + c_i) = 1$$

(stessi pt all'∞ poiché tre rette di grado max) -

⑫ Pk: all ∞ ↓

$$\{x \in \mathbb{R}^2: \underbrace{(x_1 + x_2 - (x_1 + x_2)^2)}_{\text{blue}} \cdot \underbrace{(x_1 x_2 + 1)}_{\text{green}} \cdot \underbrace{(x_1 - \sqrt{x_1})}_{\text{purple}} \cdot \underbrace{(x_1^2 + 17x_2)}_{\text{red}} = 0\}$$



$$[1: -1]$$

$$[1: 0]$$

$$[0: 1]$$

$$[0: 1]$$

$$[0: 1]$$

⑬ In $\mathbb{R}^3$ pt. all ∞ L:

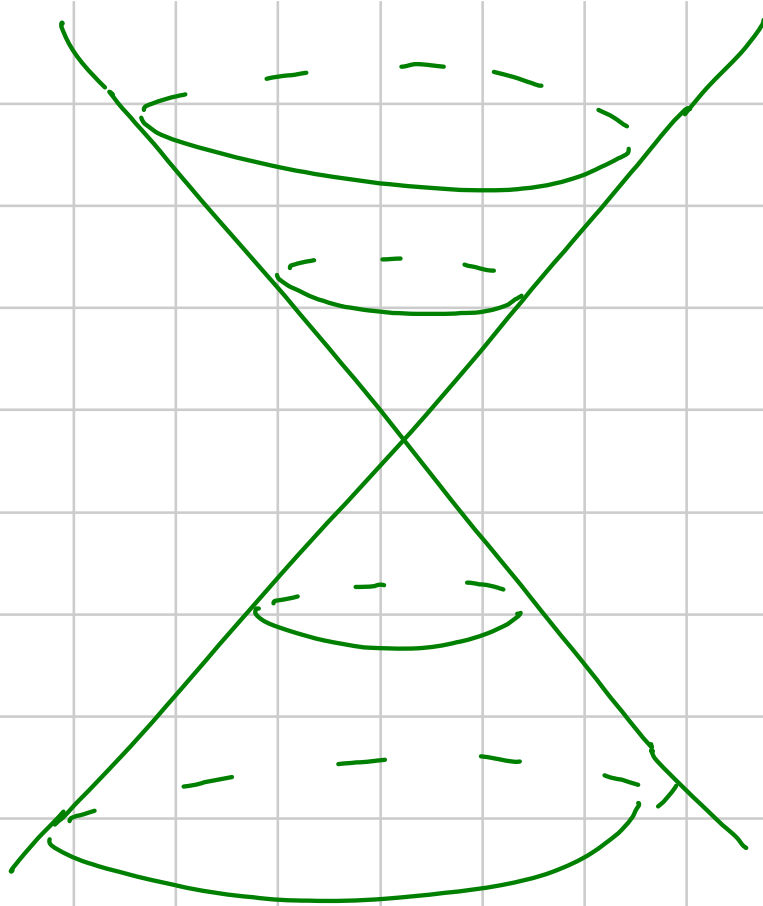
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$



$$[0:0:1]$$

(parte L: pseudo max:
 $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow [0:0:1].$)



pti all' ∞ =
= una circonf.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

l'unica conica
proiettiva non $\emptyset$

⑭ Trovare intersezioni tra

$$\pi = \{ [t+2 : t+4 : 2t+7] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R} \}$$

e l'insieme dei pt. all' ∞ $\perp$

$$\mathcal{L} : 3x^2 - xy + 2yz - 6z^2 - \sqrt{7}x + 11y - e^\pi = 0$$

$$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 = \{ [x : y : z : 1] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \}$$

parte di
finito $\perp$
 $\mathbb{P}^3/\mathbb{R}$

$$\pi \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{ [x:y:z:0] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \}$$

$$[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

parte
all'∞
di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$$L_\infty = \text{pti all'∞ di } L$$

= insieme definito dalla parte di grado max
dell'eqn. di L

$$= \{ [x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : 3x^2 - xy + 2yz - 6z^2 = 0 \}$$

$$\pi \cap \mathcal{L}_\infty : 3(t+2)^2 - (t+2)(t+4) + 2(t+4)(2t+7) - 6(2t+7)^2 = 0$$

$$(\text{cont.}) \quad 3t^2 + 22t + 39 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 117}}{3} = \frac{-11 \pm 2}{3} \begin{cases} -3 \\ -\frac{13}{3} \end{cases}$$

Pf: $\mathcal{U}'_\infty :$

$$[t+2 : t+4 : 2t+7] \Big|_{t=-3} = [-1 : 1 : 1]$$

$$[t+2 : t+4 : 2t+7] \Big|_{t=-1\frac{1}{3}} = [-7/3 : -1/3 : -5/3]$$

$$= [7 : 1 : 5].$$

⑮ Trovare almeno un pto di intersezione

$$\pi_1 = \{ [t-1 : t^2-4 : -t] : t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$$\pi_2 = \{ [1-3t^2 : 1+t : 1+3t^2] : t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

Per trovare l'intersezione
 Devo imporre che un generico pto di π_1
 sia uguale a un generico pto di π_2 , cioè

$$\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-4 \\ -t \end{pmatrix} \text{ sia proporz. a } \begin{pmatrix} 1-3t^2 \\ 1+t \\ 1+3t^2 \end{pmatrix}.$$

LICEO: $\pi_1 = \begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = 5t - 8 \end{cases}$

$$\pi_2 = \begin{cases} x = 6t + 11 \\ y = -t + 41 \end{cases}$$

$$\pi_1 \cap \pi_2$$

$$\begin{cases} 2t + 7 = 6t + 11 \\ 5t - 8 = -t + 41 \end{cases}$$

NO

INNECE :

$$\begin{cases} 2t+7 = 6s+11 \\ 5t-9 = -s+41 \end{cases}$$

OK

Yuvece:

$$\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-4 \\ -t \end{pmatrix}$$

sia proporz. a

$$\begin{pmatrix} 1-3s^2 \\ 1+s \\ 1+3s^2 \end{pmatrix} -$$

Overo: cerco t, s, k t.c.

$$\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-4 \\ -t \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1-3s^2 \\ 1+s \\ 1+3s^2 \end{pmatrix} -$$

Giusto ma non conviene. Invece invece:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} t-1 & 1-3s^2 \\ t^2-4 & 1+s \\ -t & 1+3s^2 \end{pmatrix} \leq 1$$

ovvero che i 3 det 2×2 in tale
matrice siano tutti nulli.

In pratica non scrivo 3 pezzi, ma:

- * ne scrivo una e ricavo t da s (o vice)
- * ne scrivo un'altra, uso la precedente con ω^- viene solo in s (o in t) e risolvo
- * tutto t (o s)
- * sostituisco e controllo -

Qui:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 1-3s^2 \\ t^2-4 & 1+s \\ -t & 1+3s^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (t-1)(1+3s^2) + t(1-3s^2) = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{1+3s^2}{2}$$

$$\text{II} + \text{III} + \left(t = \frac{1+3s^2}{2} \right) + \text{cont} \Rightarrow$$

$$(1+3s^2)(9s^4+6s^2+2s-13)=0$$

$s = -1$ è soluz. $\Rightarrow t = 2$ - Soluzione

$$\left[\begin{array}{c} t-1 \\ \vdots \\ t^2-4 \\ \vdots \\ -t \end{array} \right] \bigg|_{t=2} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} 1-3s^2 \\ 1+s \\ 1+3s^2 \end{array} \right] \bigg|_{s=-1} = \left[\begin{array}{c} -2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 4 \end{array} \right] \quad \underline{\underline{OK}}$$

①7 Trovare per quali $t \in \mathbb{R}$ il pto

$$P = [t-4 : 1-4t : t^2+t+1]$$

appartiene alla retta $\perp$ $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ per
 $[4:-1:5]$ e $[3:3:-1]$

$$\text{Se } \pi: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$$P = \pi(l \setminus \{0\}) \quad l = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} t-4 \\ 1-4t \\ t^2+t+1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\pi = \pi(W \setminus \{0\}) \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Or } \underline{P} \in \pi \iff l \subset W$$

$$\iff \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & t-4 \\ -1 & 3 & 1-4t \\ 5 & -1 & t^2+t+1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$(\text{cont.}) : \quad 15(t^2 - 5t + 6) = 0$$

$$\implies t=2 \quad \text{e} \quad t=3$$

⑪ Trovare i cambi di coord. affini di $\mathbb{R}^n$
che lasciano fissi i pti all' ∞ -

$$x' = A \cdot x + v \quad \text{su } \mathbb{R}^n$$

$$[y'] = [A \cdot y] \quad \text{su } \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$

$$\text{Vogliamo: } [A \cdot y] = [y] \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{ovvero } A = k \cdot I_n$$

$\Rightarrow$ vanno bene composiz. di omotetie e traslazioni

(22) Trovare il tipo affine della quadrica di equazione data

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

($\det A \neq 0$)
 A simm.

" L è un paraboloide iperbolico"

significa

"esiste $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transf. affine t.c.

$$f(L) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 \right\}"$$

dimmo: L ha il tipo affine di un
parab. iperbolico —

Come trovare il tipo?

Usare d_1, d_2, d_3, d_4 per trovare
i separi degli autoval di Q e A

$A = \begin{pmatrix} Q & ! \\ _ & _ \end{pmatrix}$ e ragionare sull'event.
che viene -

Attenzione: ciò vale se $d_4 \neq 0$ (det $A \neq 0$):
questo vale sempre verificalo -

$$(a) \quad 2x^2 - y^2 + z^2 + 4xz + 2yz - 2x + 6y - 2z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$d_2 < 0$$

$$d_3 = -2 + 4 - 2 = 0$$

$\Rightarrow$ paraboloid

NO

$$\text{Just in case } d_4 = \dots \neq 0 \Rightarrow$$

autovel Q : + - 0

autovel A : + - + -

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2z = x^2 - y^2$$

parab. iprb.

$$(c) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$d_2 < 0$$

$$d_3 = \dots < 0$$

$$d_4 = \dots > 0$$

$\Rightarrow (+ - +) -$

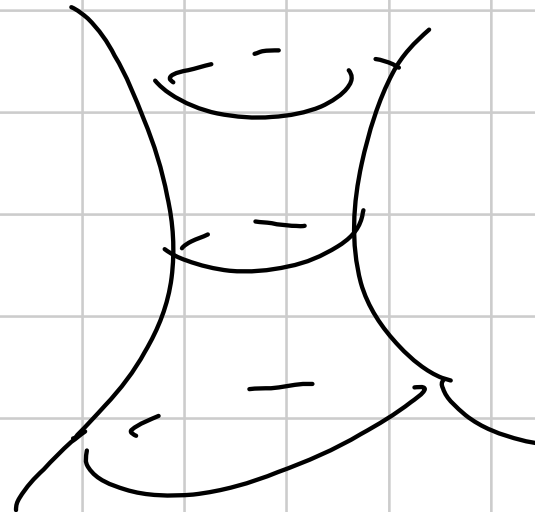
$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Circ^-
 Circ^-

$$x^2 + z^2 = 1 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2$$

hyperboloid 1 folde
(hyperboloid)



$$(d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad d_2 < 0$$

$$d_3 = 2 - 1 - 8 < 0$$

$$d_4 = \dots < 0$$

Antwort: $(+ - +) +$

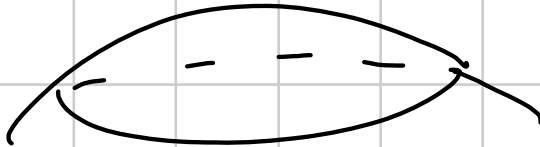
$$x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$$

cioè

$$y^2 = x^2 + z^2 + 1$$

cioè

$$z^2 = 1 + x^2 + y^2$$



iperboloide 2 foglie
(ellittica)

$$(g) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_2 > 0 \text{ tutti} \quad (d_1 > 0)$$

$$d_3 = 10 - 5 - 4 > 0$$

$$d_4 = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -50 + 16 - 15 < 0$$

Aufwand $(+ + +) -$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \text{ellipsoide}$$

$$(m) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -k & 0 \\ 1 & 5 & k & 0 \\ -k & k & k^2+9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$d_1 > 0 \quad d_2 > 0$$

$$\begin{aligned} d_3 &= 5k^2 + 45 - k^2 - k^2 - 5k^2 - k^2 - 9 - k^2 \\ &= 36 - 4k^2 = 4(9 - k^2) \end{aligned}$$

Ultimo autoval de A e^- —

Se $9 - k^2 > 0$ ovvero $|k| < 3$ ho

+ + + — ellissoide

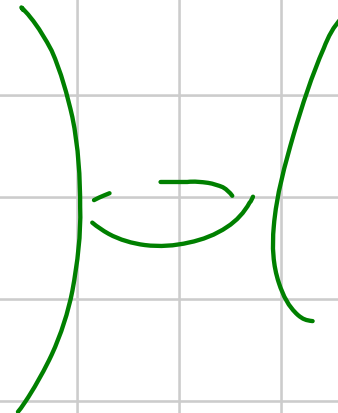
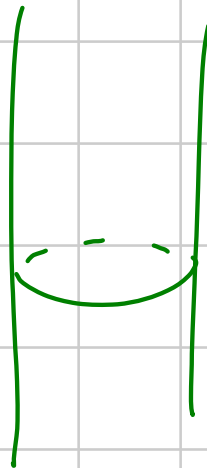
Se $|k| = 3$ degenera (+ + 0 — cilindro

$$x^2 + y^2 = 1$$

Se $|k| > 3$ ho $++--$

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2$$

iperb. 1 folde



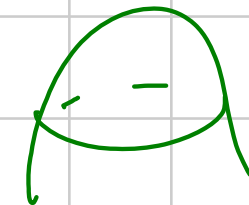
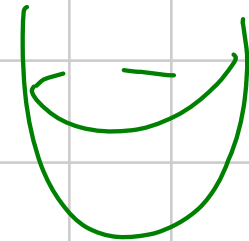
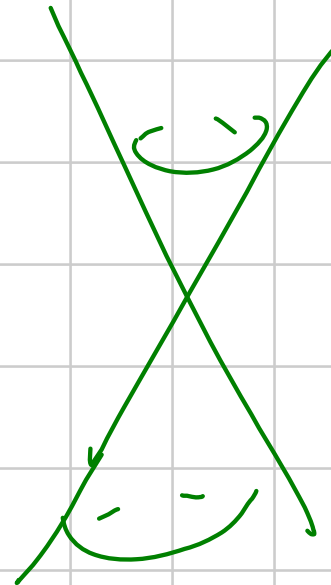
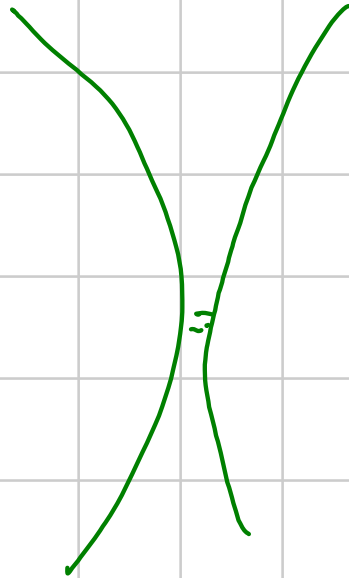
$$(p) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & k & k^2-1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

$$d_1 > 0 \quad d_2 > 0$$

$$d_3 = 2k^2 - 2 - k^2 + 1 - k^2 = -1 < 0$$

$$d_4 = \dots = k$$

$k > 0$	Antenol	$++--$	ipub. 1 folde
$k < 0$	Antenol	$++-+$	ipub. 2 folde
$k = 0$	$++-\bigcirc$	$z^2 + y^2 = z^2$	cono



$$(9) \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & -2 \\ -k & k^2+k & k & 2k \\ 0 & k & k+1 & k \\ -2 & 2k & k & k^2+3 \end{pmatrix}$$

$$d_1 > 0 \quad d_2 = k \quad d_3 = \dots = k \quad d_4 = \dots = -k$$

$k > 0$ Antwort: $(+ + +) -$ ellipsoide

$k < 0$ Antwort $(+ - +) -$ iprob. 1 felder