

Geometrie 20/3/15

Data $f: V \rightarrow V$ trovare $\mathcal{B}$ base di V
t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia facile (diagonale?)
————— 0 —————

Fissiamo $\mathcal{B}_0$ una base qualsiasi:

abbiamo $A_0 = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}$ -

Cambiando le base, come cambia la matrice?

Dato B altra base, sappiamo che $A = [f]_B^B$
è dato da

$$A = X^{-1} \cdot A_0 \cdot X$$

con X = matrice di cambio da B a B_0 -

Problema: dato A_0 una matrice di f

(caso tipico: $V = \mathbb{R}^n$, $f = f_{A_0}$

cioè $f = A_0$) si cerca una matrice

X invertibile t.c. $A = X^{-1} \cdot A_0 \cdot X$
sia "facile" -

Def: Data A_0 , una matrice oLP tipo $X^{-1} \cdot A_0 \cdot X$
(con X invertibile) si dice congiunta di A_0 -

Pb: data A_0 cercare una sua congiunta facile -

Richiamo: λ è autovettore di f se $\exists v \neq 0$
t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$; tale v è autovettore
di f rispetto a λ

Oss: f è diagonalizzabile $\iff$
ammette una base di autovettori

Pb: trovare gli autovalori

λ autovale $\iff \exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

$$\iff \exists v \neq 0 \text{ t.c. } \lambda \cdot v - f(v) = 0$$

$$\iff \exists v \neq 0 \text{ t.c. } \lambda \cdot \text{id}_V(v) - f(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists v \neq 0 \text{ t.c. } (\lambda \cdot \text{id}_V - f)(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f) \neq 0$$

Def: se λ è autovalore di f
 $\text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$

autospatio relativo a λ : contiene
tutti gli autovettori e lo 0

Prop/def: dato $f: V \rightarrow V$ lineare, possiamo

$$p_f(t) = \det([t \cdot \text{id}_V - f]_{B_0}^{B_0})$$

dove B_0 è una qualsiasi base di V . Allora:

1) $p_f(t)$ è ben def, cioè non dipende da B_0

2) $p_f(t) \in K[t]$ di grado $n = \dim(V)$ monico
tale $p_f(t)$ è detto polinomio caratteristico di f

3) λ è autoval di $f \iff \lambda$ è radice di $p_f(t)$.

↑
questa non è la def. di autovet.,
è la ricetta per cercarli.
(Def: λ autovet. $\Leftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$)

Conseguenza: come si cercano gli autovetori?

- Si parte da $A_0 \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ se $V = \mathbb{R}^n$, $f = f_{A_0}$;
altrimenti da $f: V \rightarrow V$, si sceglie α_0 .
Bisogna guardarsi e si pone $A_0 = [f]_{\alpha_0}$.

- Si calcola $p_{A_0}(t) = \det(t \cdot I_n - A_0)$

- Si cercano le radici -

Esempio: $A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$p_{A_0}(t) = \det(t \cdot I_2 - A_0) = \det\left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} t-4 & -7 \\ -1 & t+2 \end{pmatrix} = t^2 - 2t - 8 - 7 = t^2 - 2t - 15$$

$$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+15} = 1 \pm 4 \begin{matrix} \nearrow 5 = \lambda_1 \\ \searrow -3 = \lambda_2 \end{matrix}$$

La Prop dice che 5 e -3 sono autoval
di A_0 , cioè che esistono $v_1, v_2 \neq 0$ con $A_0 \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j$.
Verifichiamolo:

$$v_1: \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 4x + 7y = 5x \\ x - 2y = 5y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7y \\ \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{scogliamo } v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2: \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 4x + 7y = -3x \\ x - 2y = -3y \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ \checkmark \end{cases}$$

$\Rightarrow$ scegliamo $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ -

Notiamo: v_1, v_2 sono lin. indep.

$\Rightarrow$ sono base di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow A_0$ è diagonalizz.

Anzi: posto $X = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ si ha

$$X^{-1} \cdot A \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} -$$

Dico Prop: 1) $\det([t \cdot \text{id}_V - f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0})$
indip. da $\mathcal{B}_0$.

In fatti se $\mathcal{B}$ è un'altra e X è la
matrice di cambio abbiamo

$$[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = X^{-1} \cdot [g]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0} \cdot X$$

$\forall g: V \rightarrow V$ lineare

$$\Rightarrow \det([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \frac{1}{\det X} \cdot \det([g]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}) \cdot \det(X)$$

Applicando a $g = t \cdot \text{id}_V - f \rightsquigarrow \text{OK}$

Oss: Ho provato che per ogni $g: V \rightarrow V$
 è ben definito $\det(g)$ come
 $\det([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$ con $\mathcal{B}$ qualsiasi base.

2) $p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A_0)$ è pol. di grado n
 monico in t :

Infatti: $p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots \\ -a_{21} & t - a_{22} & -a_{23} & \dots \\ -a_{31} & -a_{32} & t - a_{33} & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$

Ogni coeff. della matrice $\bar{c}$ in $K[t]$

$\Rightarrow$ il det lo $\bar{c}$; il grado più alto
viene da

$$(t - a_{11})(t - a_{22}) \dots (t - a_{nn})$$
$$= t^n - \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})}_{\text{lo uso dopo}} t^{n-1} - \dots$$

(3) λ autov. $\iff p_f(\lambda) = 0$ — Guafatti;

λ autov. $\overset{\text{VISTO}}{\iff} \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f) \neq \emptyset$

$$\Longleftrightarrow \det(\lambda \text{id}_V - f) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \det(t \cdot \text{id}_V - f) \Big|_{t=\lambda} = 0$$

$$\Longleftrightarrow p_f(\lambda) = 0 \quad -$$



Qss : ho provato che per $g: V \rightarrow V$
 $\det(g)$ è ben def. come $\det([g]_{\mathcal{B}})$

Prop : data $g: V \rightarrow V$ è ben def. $\text{tr}(g)$

come $\text{tr}([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$ -

Dim: se cambio base ho

$$[g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = X^{-1} \cdot [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot X$$

$$\Rightarrow \text{tr}([g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}) = \text{tr}\left(\underbrace{X^{-1} \cdot [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot X}_{\text{cyclical property}}\right)$$

$$= \text{tr}([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot X \cdot X^{-1}) = \text{tr}([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}). \quad \square$$

Prop (coeff. molvuli di $p_f(t)$) :

$$p_f(t) = t^m - \text{tr}(f) \cdot t^{m-1} + \dots + (-1)^m \cdot \det(f).$$

Dim: • coeff(t^m) = 1 : visto ✓

• termine noto: $p_f(0) = \det(0 \cdot \text{id} - f) = \det(-f)$
 $= (-1)^m \cdot \det(f)$

• coeff t^{m-1} : gradi di t in $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \cancel{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cancel{1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto t^m - t_n(f) \cdot t^{m-1} + \dots$$

per gli addendi con un fattore fuori di φ_0

i fattori fuori diago sono almeno due

$$\Rightarrow \deg \leq m-2$$

