

## Geometria 19/3/15

Def: Se  $V$  è sp. vett. su  $\mathbb{C}$  diciamo che  
 $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

• sesquilineare se lin. a sx e anti-lin. a dx

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 f(v_1, w) + \lambda_2 f(v_2, w)$$

$$f(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \overline{\lambda_1} f(v, w_1) + \overline{\lambda_2} f(v, w_2)$$

• hermitiana se  $f(w, v) = \overline{f(v, w)}$

- def. pos. se  $f(v,v) > 0 \quad \forall v \neq 0$
- prodotto scalare hermitiano se valgono le precedenti.

Oss: sapendo che  $i$  hermitiano  
lin a sx  $\Leftrightarrow$  antilin a dx \_

Fatto: tutto quanto visto nel caso reale  
si ripete nel caso complesso badando  
che  $sx \neq dx$ .

Def:  $M$  matrice,  $M^* = {}^t \overline{M}$ .

Def:  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  poipo  
 $\langle \cdot | \cdot \rangle_M : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle z | w \rangle_M = w^* \cdot M \cdot z$$

Oss:  $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$  sono sesquilineari su  $\mathbb{C}^n$ .

Prop (come su  $\mathbb{R}$ ): ogni sesquilineare su  $\mathbb{C}^n$  è

del tipo  $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$  per  $M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ .

Def:  $M$  è hermitiana se  $M^* = M$   
(analogo su  $\mathbb{C}$  di simmetrica) -

Prop (come su  $\mathbb{R}$ ):

$\langle \cdot | \cdot \rangle_M$  hermitiana  $\Leftrightarrow M$  hermitiana.

Dim:  $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$  hermitiana

$$\Leftrightarrow \langle w | z \rangle_M = \overline{\langle z | w \rangle_M} \quad \forall z, w$$

$$\Leftrightarrow z^* \cdot M \cdot w = \overline{w^* \cdot M \cdot z}$$

$$\Leftrightarrow z^* \cdot M \cdot w = \overline{w^*} \cdot \overline{M} \cdot \overline{z}$$

$$\underbrace{\overline{w^*}}_{\left( {}^t \overline{w} \right) = {}^t w} \cdot \overline{M} \cdot \overline{z}$$

$$\Leftrightarrow z^* \cdot M \cdot w = {}^t \left( {}^t w \cdot \overline{M} \cdot \overline{z} \right)$$

$$\Leftrightarrow z^* \cdot M \cdot w = {}^t \overline{z} \cdot {}^t \overline{M} \cdot w$$

$$\Leftrightarrow z^* \cdot M \cdot w = z^* \cdot M^* \cdot w$$

$$\Leftrightarrow z^* \cdot (M - M^*) \cdot w = 0 \quad \forall z, w$$

$$\Leftrightarrow M - M^* = 0$$

( $\Leftarrow$  ovvio;  $\Rightarrow$  prendere  $z = e_j$ ,  $w = e_i$   
e si trova  $(M - M^*)_{ji} = 0$ ).  $\square$

Q: quali  $M$  hermitiane danno  $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$  def. pos.?

(Lo vedremo -)

Come su  $\mathbb{R}$  : se ho  $V, \langle \cdot | \cdot \rangle$  di dim  $< +\infty$   
e  $W \subset V$  sottospazio, ho  $V = W \oplus W^\perp$   
( $W^\perp = \{v \in V : \langle v | w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$ )  
 $\Rightarrow$  proiezione ortogonale  $P_W$  -

Prop: se  $w_1, \dots, w_k$  è base ortog. di  $W$

$$P_W(v) = \sum_{j=1}^k \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j -$$

NON  $\langle w_j | v \rangle$

(Perché  $\langle v | w_j \rangle$ ? Deve essere lineare in  $v$ .)

Ortonormalizzazione:

$v_1, \dots, v_m$  base  $\rightsquigarrow w_1, \dots, w_m$  base  
ortonormale

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle v_{k+1} | w_j \rangle \cdot w_j$$

$$w_{k+1} = \frac{\tilde{w}_{k+1}}{\|\tilde{w}_{k+1}\|}.$$

$\hookrightarrow$  non  $\langle w_j | v_{k+1} \rangle$

Analogo su  $\mathbb{C}$  delle matrici simmetriche e ortogonali.

Def:  $f: V \rightarrow V$

- autoaggiunta se  $\langle f(v) | w \rangle = \langle v | f(w) \rangle$
- isometria se  $\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle v | w \rangle$

Nel caso  $\mathbb{C}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$  ( $\langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^n} = w^* \cdot z$ ):

- $M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  è autoaggiunta

$\Leftrightarrow$  hermitiana

- $M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  è isometrica

$$\Leftrightarrow M^* \cdot M = I_n \quad (\text{diciamo } M \text{ unitaria})$$

$$\Leftrightarrow M \cdot M^* = I_n$$

$$\Leftrightarrow \exists M^{-1} \text{ ed } M^{-1} = M^*$$

$$\Leftrightarrow \text{le colonne di } M \text{ sono base ortonormale di } \mathbb{C}^n$$

Esercizio: in  $V, \langle \cdot | \cdot \rangle$  esprimere  
 $\|v+w\|$

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w | v+w \rangle =$$

$$= \langle v | v+w \rangle + \langle w | v+w \rangle =$$

$$= \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle$$

$$= \|v\|^2 + \langle v | w \rangle + \overline{\langle v | w \rangle} + \|w\|^2$$

$$= \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle v | w \rangle) + \|w\|^2$$

$\Rightarrow$   $\| \cdot \|$  determina  $\text{Re}(\langle \cdot | \cdot \rangle)$  ma non  $\langle \cdot | \cdot \rangle$

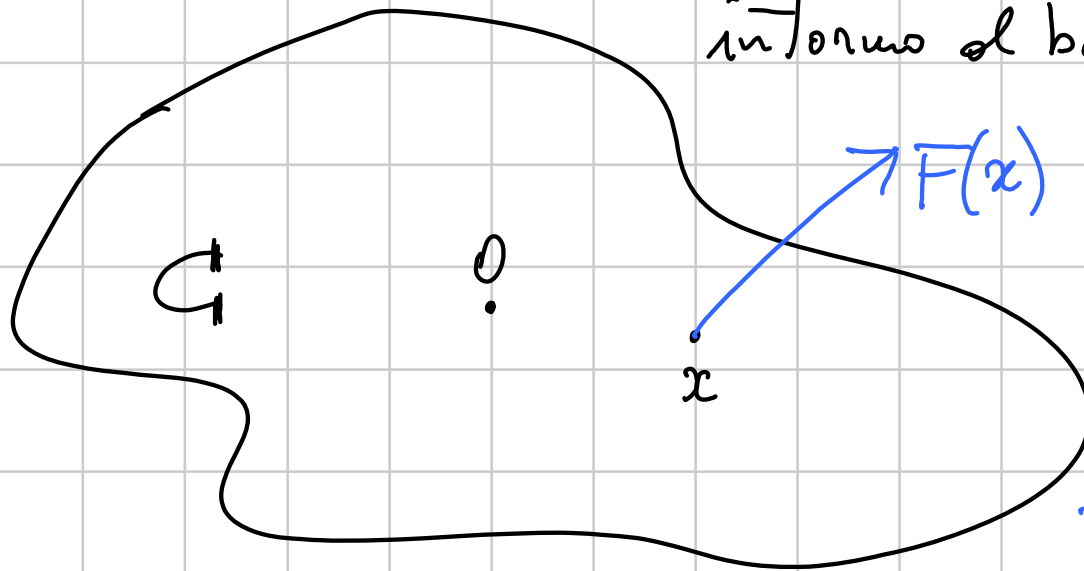
— • —

## Autovalori e diagonalizzazione

Sia  $C$  un solido soggetto a forze  
ma in quiete  $\Rightarrow$  la risultante di tutte  
le forze nel baricentro  $\vec{c} = 0$

Forze agiscono: • inducendo una deformazione

- inducendo moto rapido intorno al baricentro -



$$F: C \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$C \subset \mathbb{R}^3;$$

$$F(O) = 0$$

Approssimazione lineare (al I ordine):

almeno vicino a 0 avremo  $F(x) \cong T \cdot x$

$T \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  (matrice degli sforzi)

(Visto  $M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \underbrace{\mathcal{S}_3(\mathbb{R})}_{\text{simmetriche}} \oplus \underbrace{\mathcal{A}_3(\mathbb{R})}_{\text{antisimmetriche}} \text{ )}$

$$\Rightarrow T = \underbrace{S}_{= \frac{1}{2}(T + {}^t T)} + \underbrace{A}_{= \frac{1}{2}(T - {}^t T)}$$

*Simm**antisimm*

Fatto:  $\Sigma$  responsabile della deformazione  
 $A$  responsabile del mov. rigido intorno a  $O$ .

Oggi: spieghiamo  $\Sigma$ .

Esempio:  $\Sigma = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 & 6 & -6\sqrt{3} \\ 6 & -3 & -5\sqrt{3} \\ -6\sqrt{3} & -5\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$

Come agisce? Non si capisce! Yurea:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$S \cdot v_1 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 & 6 & -6\sqrt{3} \\ 6 & -3 & -5\sqrt{3} \\ -6\sqrt{3} & -5\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix} = 3 \cdot v_1$$

$$S \cdot v_2 = -v_2, \quad S \cdot v_3 = 0.$$

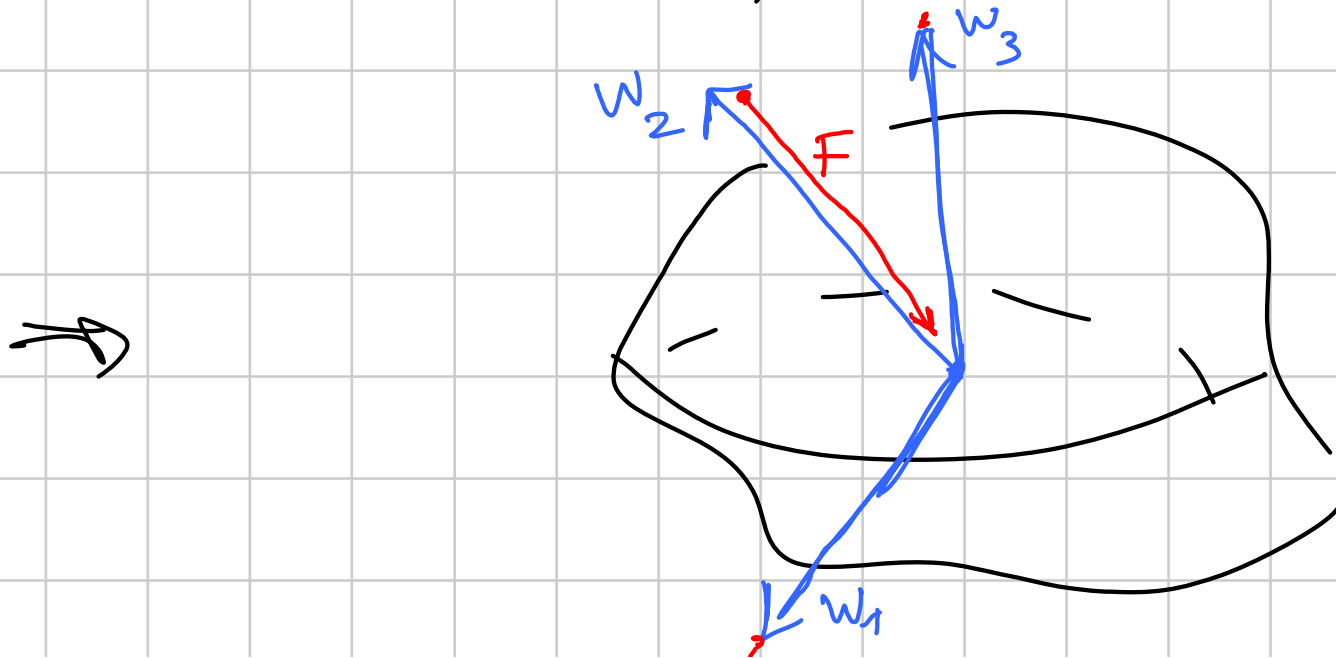
Azi vogliamo che  $v_1, v_2, v_3$  sono ortog. tra loro

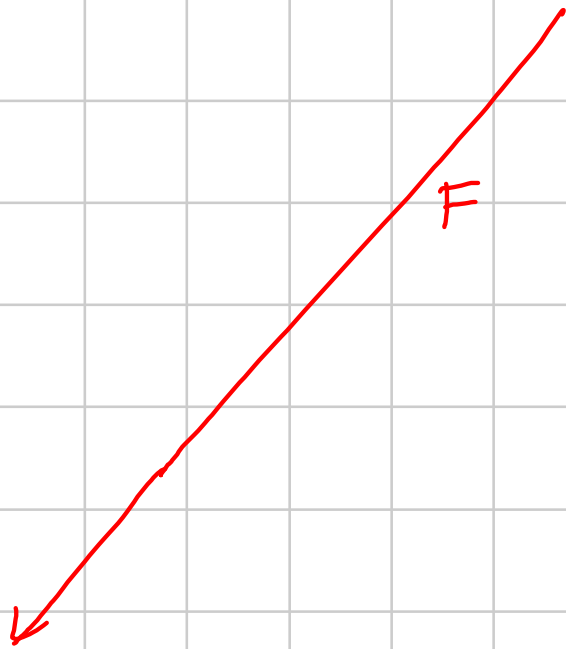
$$\Rightarrow w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \quad w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$$

ho  $w_1, w_2, w_3$  tre di vettori ortonormali

cioè sistema di riferimento cartesiano  
ortogonale unitario

e  $S \cdot w_1 = 3 \cdot w_1$ ,  $S \cdot w_2 = -w_2$ ,  $S \cdot w_3 = 0$





$\Rightarrow$  in questo nuovo riferimento, l'azione fisica  
di  $S$  è perfettamente chiara -

Problema: Dato  $V$  sp. vett. su  $K$  ( $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )  
e  $f: V \rightarrow V$  lineare, cerchiamo una base  
 $\mathcal{B}$  di  $V$  tale che  $[f]_{\mathcal{B}}$  sia facile.

(Nel caso precedente:  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $f(v) = S \cdot v$   
 $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ ,  $f(w_1) = 3 \cdot w_1$ ,  $f(w_2) = -w_2$ ,  
 $f(w_3) = 0 \cdot w_3$ )  
 $\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Def:  $f$  si dice diagonalizzabile se esiste base

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \quad \text{t.c.}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_j \in K$$

$$\text{ovvero } f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j \quad j = 1, \dots, n \quad -$$

Q: perché prendere  $f: V \rightarrow V$  e non  
 $f: V \rightarrow W$ , oppure perché  $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  e non  
 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ?

A: perché prendendo  $[f]_{\mathcal{B}}$  vedo  
solo il rango:

Esercizio: data  $f: V \rightarrow W$  di rango  $k$  esistono  
 $\mathcal{B}$  base di  $V$  e  $\mathcal{C}$  base di  $W$  t.c.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left( \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

**Scopo**: data  $f$  cercare di diagonalizzarla, cioè

trovare base  $v_1, \dots, v_m$  t.c.  $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j$  -

Fatto: NON è sempre possibile -

Strategia: cerco un vettore alla volta -

Def: data  $f: \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  diciamo che  $\lambda \in K$   
è un autovalore di  $f$  se esiste  $v \in \bar{V}$ ,  $v \neq 0$   
t.c.  $f(v) = \lambda \cdot v$ . Ogni tale  $v$  è detto  
autovettore di  $f$  rispetto all'autovalore  $\lambda$  -

Oss: se non chiedessi  $v \neq 0$  avrei che ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$  sarebbe autovettore, poiché

$$f(v) = \lambda \cdot v \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ se } v = 0$$

Q: Come trovare gli autovettori? [Domani].  
\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

Approssimazione di Taylor in più variabili  
del secondo ordine

In una variabile :  $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a,b)$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

"o piccolo"

una quantità che tende  
a 0 più velocemente di  
 $(x-x_0)^2$ , cioè trascurabile  
rispetto a  $(x-x_0)^2$  per  $|x-x_0| \ll 1$ .

Richiamo:  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  aperto

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = \left. \frac{d}{dt} f(\underline{x} + t e_i) \right|_{t=0}$$

= derivate in  $\underline{x}$  di  $f$  rispetto a  $x_i$   
considerando fisse  $x_j$  con  $j \neq i$ .

Def: 
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

(notazione 
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$
)

Ex (20) (c) :  $f(x,y) = \sin(1+x-2y) \cdot e^{x^2-y+2xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(1+x-2y) \cdot e^{x^2-y+2xy} + \sin(1+x-2y) \cdot e^{x^2-y+2xy} \cdot (2x+2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(\dots) \cdot e^{\dots} + \cos(\dots) \cdot e^{\dots} \cdot (2x+2y) + \cos(\dots) \cdot e^{\dots} \cdot (2x+2y) + \sin(\dots) \cdot e^{\dots} \cdot (2x+2y)^2 + \sin(\dots) \cdot e^{\dots} \cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \sin(\dots) \cdot (-2) \cdot e^{\dots} + \cos(\dots) \cdot e^{\dots} \cdot (-1+2x)$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos(\dots) \cdot (-2) \cdot e^{\dots} \cdot (2x+2y) + \sin(\dots) \cdot e^{\dots} \cdot (-1+2x)(2x+2y) \\
 & + \sin(\dots) \cdot e^{\dots} \cdot 2
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(1+x-2y) \cdot (-2) \cdot e^{x^2-y+2xy} + \sin(1+x-2y) \cdot e^{x^2-y+2xy} \cdot (-1+2x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= -\sin(\dots) \cdot (-2) e^{\dots} + \cos(\dots) \cdot (-2) \cdot e^{\dots} \cdot (2x+2y)$$

$$+ \cos(\dots) \cdot e^{\dots} \cdot (-1+2x) + \sin(\dots) \cdot e^{\dots} \cdot (2x+2y)(-1+2x) + \sin(\dots) \cdot e^{\dots} \cdot 2$$

Scoperto:  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

Teo: Se  $f$  è "abbastanza buona" allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j -$$

Derivazione funzione composta:

In una variabile:

$$\mathbb{R}_x \xrightarrow{Y} \mathbb{R}_y \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$$

$$(\alpha \circ Y)' = (\alpha' \circ Y) \cdot Y'$$

$$\underbrace{\frac{d(\alpha(Y(x)))}{dx}} = \underbrace{\frac{d\alpha}{dy}(Y(x))} \cdot \underbrace{\frac{dY}{dx}(x)}$$

$\downarrow$   
 misura incremento  
 di  $\alpha(Y(x))$   
 rispetto a  $x$

$\downarrow$        $\downarrow$   
 $\left( \text{incremento di } \alpha \text{ rispetto a } y \right) \times \left( \text{incremento di } Y \text{ rispetto a } x \right)$

$Y$  a più variabili :

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{R}_x^m \xrightarrow{Y} \mathbb{R}_y^m \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\
 Y(x) = \begin{pmatrix} Y_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ Y_m(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\frac{\partial (f \circ Y)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(Y(x)) \cdot \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}(x)$$

↓  
 incremento di  $f \circ Y$   
 in direz.  $x_i$

↓      ↓  
 (incremento di  $f$  lungo  $y_j$ )  $\times$  (incremento di  $Y_j$  lungo  $x_i$ )

↓  
 Sommati su  
 $j = 1, \dots, m$