

Geometria 18/3/15

Teorema : $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.



$$\det(A_j) > 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & \end{array} \right) \quad \text{with } A_1 \text{ and the column index } j \text{ highlighted in blue.}$$

(Lo vedremo -)

Ese 9(6): $\langle \cdot | \cdot \rangle$ $\bar{c}$ def. pos.?
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

[Si] A mano:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 4xy - 2yz$$
$$(\therefore) = (x+2y)^2 + (y-z)^2 + 2z^2$$

$\bar{c}$ sempre ≥ 0 ; nullo solo se

$$x+2y=0 \quad y-z=0 \quad z=0 \implies x=y=z \neq 0$$

SI

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left[\det A_1 > 0, \det A_2 > 0 \right. \\ \left. \det A_3 = \det A = \dots < 0 : N_0 \right]$$

$$x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz - 2yz$$

Cerchiamo $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in modo che sia < 0 :

x, y discorde x, z discorde y, z concordi

$$\leadsto x = + \quad y, z = -$$

$$\text{quattro } |x| > |y|, |z|$$

$$x = t \quad y, z = -1$$

$$\leadsto t^2 + 5 + 3 - 4t - 2t - 2 = t^2 - 6t + 6$$

$$t = 2 : < 0 \quad \underline{\text{No}}$$

$$\textcircled{13} \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \quad \langle p(t) | q(t) \rangle = \sum_{j=0}^2 p(j) \cdot q(j)$$

$$\text{Trovare } p(t) \text{ ortog a } 1+t \text{ e } 1+t^2 \left(\text{con norme } \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$\langle p(t) | 1+t \rangle = a_0 \cdot 1 + (a_0 + a_1 + a_2) \cdot 2 + (a_0 + 2a_1 + 4a_2) \cdot 3$$

$$\langle p(t) | 1+t^2 \rangle = a_0 \cdot 1 + (a_0 + a_1 + a_2) \cdot 2 + (a_0 + 2a_1 + 4a_2) \cdot 5$$

$$\begin{cases} 3a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_0 - 2a_2 = 0 \\ 5a_0 + 2a_1 = 0 \end{cases}$$

$$a_2 = a_0$$

$$\text{Solution } \neq 0: \quad a_0 = a_2 = 2 \\ a_1 = -5$$

$$p(t) = 2 - 5t + 2t^2$$

$$\|p(t)\| = \sqrt{p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

⑩ Trovare base ortogonale in $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$
 e $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)^\perp$ -

① $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ -

(Rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$;
 quindi no) -

Cerchiamo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp_A \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$:

$$+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(Risposta è $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$, $\| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \| = \sqrt{17}$; quindi.)

$$\begin{aligned} \| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \|_A &= \sqrt{2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) \cdot 4 + 7 \cdot 4^2} \\ &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\leadsto \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$c) n=3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & \left(\bigwedge^n \mathbb{R}^3 \text{ con } \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}, \left(\text{Span}(v_1, v_2) \right)^{\perp} \right)^{\frac{1}{2}} = \text{Span}(v_1 \wedge v_2) \\ & = \text{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} ; \text{ qui no.} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ (x \ y \ z) \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$\leadsto$ two more
solut. non
nulla $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$$\leadsto \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 + 2x_0z_0 + 2y_0z_0}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

17) Trovare la matrice delle proiezioni ortog. di $\mathbb{R}^4$ su $\text{Span} \left(\underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right) \left(\underset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} \right) = W$.

Nota che $w_1 \perp w_2$; inoltre $\|w_1\| = \|w_2\| = \sqrt{7}$.

Uso la formula $p_W(v) = \sum_{j=1}^k \frac{\langle v, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j$;

$$p_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{x-y+z+2t}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x+y+2z-t}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$



 M

Sappiamo che $M^2 = M$ (verif. col 1°) —
 Inoltre noto che ${}^t M = M$ — non è un caso —

⑮ In $\mathbb{R}^4$ trovare base ortogonale di

$$\text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^\perp$$

Prima trovo base qualsiasi, poi la ortogonalizzo -

A mano: devo trovare due soluz. lin. indep. di

$$\begin{cases} 3x + y - 5z + 2w = 0 \\ -2x + 4y + 3z - w = 0 \end{cases}$$

(Visto: "trucco dei det 2×2 " cercando
una soluz. con $\omega = 0$ e una con $\pi = 0$.)

Interpretazione:

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \text{dove } \omega = 0 \right. \text{ e } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \left\{ \text{dove } \pi = 0 \right. \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Trovo $\begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}$; cerco w_1, w_2 ortogonali.
 v_1 v_2

$$w_1 = v_1; \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix} - \frac{-9 + 126}{23^2 + 1 + 14^2} \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \dots -$$

Richiamo: in $\mathbb{R}^3$ con $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$v \wedge w$ è il retto t.c.

- $\bar{e}$ ortop. a $\text{Span}(v, w)$
- ha norme = area $\sqrt{v \cdot v \cdot w \cdot w - (v \cdot w)^2}$ ($\Rightarrow 0$ se lin. d.p.)
- $(v, w, v \wedge w)$ è base positive d. $\mathbb{R}^3$
($\det > 0$) -

Compimento: come ortonormalizzare una
base v_1, v_2, v_3 d. $\mathbb{R}^3$;

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad \tilde{w}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1, \quad w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}.$$

Per w_3 vogliamo che sia

- unitario

- ortogonale a $\text{Span}(w_1, w_2) = \text{Span}(v_1, v_2)$

→ vanno bene solo $\pm \frac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|}$.

Quale dei due? Ricordo che la matrice
di cambio di base da (v_1, v_2, v_3) a

$$(v_1, w_2, w_3) \quad \dot{=} \quad \begin{pmatrix} >0 & * & * \\ 0 & >0 & * \\ 0 & 0 & >0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det > 0$$

$$\Rightarrow \det(w_1, w_2, w_3) \text{ concorde com } \det(v_1, v_2, v_3)$$

$$\Rightarrow \det(v_1, v_2, w_3) \text{ concorde com } \det(v_1, v_2, v_3)$$

$$\Rightarrow w_3 = + \frac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|} \quad \text{se } \det(v_1, v_2, v_3) > 0$$

$$w_3 = - \frac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|} \quad \text{se } \det(v_1, v_2, v_3) < 0$$

$$\underline{\text{Exmp}}: \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{14-6}{13} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 \\ 75 \\ -50 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{13^2 + 75^2 + 50^2}} \begin{pmatrix} 13 \\ 75 \\ -50 \end{pmatrix}$$

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} = -9 + 8 + 42 + 10 > 0$$

$$\Rightarrow w_3 = + \frac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{625+9+4}} \begin{pmatrix} -25 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Def: Sia V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Chiamo $f: V \rightarrow V$;

- autaggiunta se $\langle f(v) | w \rangle = \langle v | f(w) \rangle \quad \forall v, w$
- isometria se $\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle v | w \rangle \quad \forall v, w$.

Prop.: se $V = \mathbb{R}^n$ con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ e
 $f = A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ si ha:

- f autoaggiunta $\iff {}^t A = A$ (A simmetrica)
- f isometria $\iff {}^t A \cdot A = I_n$ (diretto A ortogonale)

Dim.: f autoaggiunta $\iff$
 $\langle Ax | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x | Ay \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x, y$

$$\iff {}^t y \cdot (A \cdot x) = {}^t (A \cdot y) \cdot x \quad \forall x, y$$

$$\iff {}^t y \cdot A \cdot x = {}^t y \cdot {}^t A \cdot x \quad \forall x, y$$

$$\iff {}^t A = A \quad \left(\text{perdendo } y = e_i \quad x = e_j \text{ h.o.} \right. \\ \left. (A)_{ij} = ({}^t A)_{ij} = (A)_{ji} \right)$$

$$\text{f isometria} \iff \langle Ax | Ay \rangle = \langle x | y \rangle \quad \forall x, y$$

$$\implies {}^t y \cdot {}^t A \cdot A \cdot x = {}^t y \cdot x \quad \forall x, y$$

$$\iff {}^t A \cdot A = I_m$$



Matrici ortogonali (le isometrie di $\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$):

$${}^t A \cdot A = I_n \quad (\Leftrightarrow A \cdot {}^t A = I_n)$$

$$(\Leftrightarrow \exists A^{-1} \text{ ed } {}^t A)$$

Se $A = (u_1, \dots, u_m)$

$${}^t A \cdot A = \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_m \end{pmatrix} \cdot (u_1, \dots, u_m) = \begin{pmatrix} {}^t u_i \cdot u_j \end{pmatrix}_{i,j=1..n}$$

$$= \left(\langle u_j | u_i \rangle \right)_{i,j=1 \dots n}.$$

Dunque A **ortogonale**

$$\Leftrightarrow \langle u_j | u_i \rangle = \delta_{ij}$$

$\Leftrightarrow$ le colonne di A sono
una base **ortonormale** -

Prop: Dato V con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $f: V \rightarrow V$ lineare, ho

f proiez. ortogonale $\iff f \circ f = f$ e f è
autoappunto.

(Sappiamo: f proiez $\iff f \circ f = f$.)

Dim: $\implies$ Sia $V = W \oplus W^\perp$ e $f = p_W$.

Devo provare che $\langle p_W(v_1) / v_2 \rangle = \langle v_1 / p_W(v_2) \rangle$.

Sia $v_1 = \underset{\substack{\nearrow \\ W}}{w_1} + \underset{\substack{\nearrow \\ W^\perp}}{u_1}$ $v_2 = \underset{\substack{\nearrow \\ W}}{w_2} + \underset{\substack{\nwarrow \\ W^\perp}}{u_2}$

$$\langle P_W(v_1) | v_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 + u_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 \rangle$$

$$\langle v_1 | P_W(v_2) \rangle = \langle w_1 + u_1 | w_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 \rangle \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$ Supponiamo $f \circ f = I$ e f autaggiunto -

So che f è la proiezione su $W = \text{Im}(f)$

rispetto alla deco $V = W \oplus \text{Ker}(f)$ -

Devo provare che $\text{Ker}(f) = W^\perp$

Sia $u \in \text{Ker}(f)$; provi che $u \in W^\perp$ ovvero
che $\langle w | u \rangle = 0 \quad \forall w \in W$;

$$\langle w | u \rangle = \langle \underset{\substack{\parallel \\ f(w)}}{f(w)} | u \rangle = \langle w | f(u) \rangle = \langle w | 0 \rangle = 0 .$$

Viceversa: direttamente (esercizio) oppure

se $\dim V = n < +\infty$ ho

$$\left. \begin{array}{l} \dim W^\perp = n - \dim W \\ \dim \ker f = n - \dim W \\ \ker f \subset W^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow \ker f = W^\perp$$



One si spiege : $M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$

proiez. ortog. su $W \subset \mathbb{R}^4$ e simetria

perché in $\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$
"autoappunto" = $\mathbb{R}^n$ "simmetrica"

Es: $W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$

$P_W = ?$

$I_3 = P_W + P_{W^\perp}$

$\Rightarrow P_W = I_3 - P_{W^\perp} \quad ; \quad W^\perp = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) =$
 $= \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 14 \\ -19 \\ -16 \end{pmatrix} \right)$

$$\Rightarrow P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{14x - 19y - 16z}{14^2 + 19^2 + 16^2} \begin{pmatrix} 14 \\ -19 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{813} \begin{pmatrix} 617 & 266 & . \\ 266 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_A$$

$${}^t A = A = A^2$$

Caso complesso.

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^{2n}}^2 &= x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2 \\ &= |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \\ &= \overline{z_1} \cdot z_1 + \dots + \overline{z_n} \cdot z_n \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Def:}} \quad \langle Z|W \rangle_{\mathbb{C}^n} = \overline{w}_1 \cdot z_1 + \dots + \overline{w}_m \cdot z_m \\ = {}^t \overline{w} \cdot z$$

prodotto scalare
canonico di $\mathbb{C}^n$

Def: Se $A \in M_{k \times h}(\mathbb{C})$ posto

$$A^* = {}^t \overline{A} \in M_{h \times k}(\mathbb{C})$$

(Notaz. alternativa: A^H)

Proprietà di $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$:

- sesquilineare : lineare a sx
antilineare a dx

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 | w \rangle = \lambda_1 \langle v_1 | w \rangle + \lambda_2 \langle v_2 | w \rangle$$

$$\langle v | \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \cdot \langle v | w_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \cdot \langle v | w_2 \rangle$$

- hermitiano : $\langle w | v \rangle = \overline{\langle v | w \rangle}$

$$(\Rightarrow \langle v | v \rangle = \overline{\langle v | v \rangle} \Rightarrow \langle v | v \rangle \in \mathbb{R})$$

• definito positivo : $\langle v/v \rangle \geq 0 \quad \forall v \neq 0$ _

(Verifiché : facile _)