

AVVISO

MARTEDÌ 21/4/2015

AULA F.06

13.30 - 14.30

RECUPERO LEZIONE

(PETRONIO)

Es. 6. $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ $p_A(t)$ ha n radici reali
(con molteplicità), A diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, ovvero
 $\exists M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ invertibile, t.c. $M^{-1} A M$ è diagonale - $\Rightarrow \exists B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertibile t.c.

$$B^{-1} A B = D$$

Din Posso scrivere M come somma di una matrice
totalmente reale e una totalmente immaginaria

$$\{m_{ij}\} = x_{ij} + i y_{ij}$$

$$M = X + i Y \quad X, Y \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$M^{-1} A M = D \quad \text{ovvero:}$$

$$A M = M D \quad \text{e sostituendo } M = X + i Y$$

$$(*) \quad A(X + i Y) = (X + i Y) D$$

$$A, X, Y, D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

in ciascun lato di (*) separo parte reale e
parte immaginaria:

$$A X = X D, \quad A Y = Y D$$

Se X o Y sono invertibili avrei concluso.

2

In generale posso cercare un $t \in \mathbb{R}$ tale che $X + tY$ sia invertibile.

$p(t) = \det(X + tY)$ è un polinomio di grado $\leq n$.

Se fosse $p(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ allora $p(t)$ sarebbe

il polinomio nullo $\Rightarrow p(i) = \det(X + iY) = 0$

ma sappiamo per ipotesi che $M = X + iY$ è invertibile.

Quindi esiste un $t \in \mathbb{R}$ (ne esistono tanti)

tale che $X + tY$ è invertibile. Inoltre

$B := X + tY \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e vale

$$AB = BD \quad \text{ovvero} \quad B^{-1}AB = D$$

□

Es. 7

$$A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \geq 0$$

$$P_A(t) = (t - a)(t - d) - bc =$$

$$= t^2 - (a + d)t + ad - bc$$

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc)$$

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) =$$

$$= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc =$$

$$= (a - d)^2 + 4bc > 0$$

Quindi le radici sono reali distinte:

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}[(a + d) \pm \sqrt{\Delta}]$$

$$t_1 I - A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(d-a) + \sqrt{\Delta}] & -b \\ -c & \frac{1}{2}[(a-d) + \sqrt{\Delta}] \end{pmatrix}$$

$$\Delta = (a-d)^2 + bc > (a-d)^2$$

$$\sqrt{\Delta} > |a-d|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[(d-a) + \sqrt{\Delta}] > 0$$

$$\frac{1}{2}[(a-d) + \sqrt{\Delta}] > 0$$

e quindi se $v_1 \in \text{Ker}(t_1 I - A)$, v_1 soddisfa

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[(d-a) + \sqrt{\Delta}]x - by = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}[(d-a) + \sqrt{\Delta}]}_{>0} b^{-1} y$$

e le coordinate sono concordi

Analogamente $t_2 I - A =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(d-a) - \sqrt{\Delta}] & -b \\ -c & \frac{1}{2}[(a-d) - \sqrt{\Delta}] \end{pmatrix} \quad e$$

$\frac{1}{2}[(d-a) - \sqrt{\Delta}] < 0$ e le coordinate di un vettore (diverso da 0) di $\text{Ker}(t_2 I - A)$ sono discordi —

Es. 9 (a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica $\Rightarrow$ diagonalizzabile. ⁴
in $\mathbb{R}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è triangolare ~~non diagonalizzabile~~.
 $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$

ha un unico autovalore con m.e. (1) = 2

$$\text{m.g.}(1) = 2 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ non è diagonalizzabile, né in $\mathbb{R}$, né in $\mathbb{C}$

$$(c) P_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 1 \\ -1 & t-2 & 0 \\ -1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-1) \cdot (2-t) + (t-2)(t^2 - 2t - 1) =$$

$$= (t-2)^2 \cdot t$$

autar: $\lambda = 0$

$\lambda = 2$

m.e. = 1

m.e. = 2

m.g. = 1

m.g. = 2 - \text{rk}(2I - A) = 1

Quindi A non è diagonalizzabile né in $\mathbb{R}$, né in $\mathbb{C}$.

$$(d) P_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2)(t^2 + 1)$$

Autovalori $2, i, -i$ sono distinti, ma non
reali $\Rightarrow$ diagonalizzabile in $\mathbb{C}$, ma non in $\mathbb{R}$.

(e) ~~$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$~~

5

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = (t-1)(t^2-6t+5) = \\ = (t-1)^2(t-5)$$

$$\lambda = 1 \quad m.a. = 2 \quad m.g. = 3 - rk(I - A) =$$

$$= 3 - rk \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

$$\lambda = 5 \quad m.a. = 1 \quad \Rightarrow m.g. = 1$$

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$

(f) simmetrica $\Rightarrow$ diagonalizzabile.

$$(h) \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & \boxed{\begin{matrix} 3 & 10 \\ 0 & -2 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \\ -1 & 1 & 1 & \boxed{\begin{matrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \\ -1 & 1 & 2 & \boxed{\begin{matrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

è una matrice triangolare inferiore a blocchi
(e i blocchi sono triang. sup.)

$$p_A(t) = (t+2)(t-3)^2(t+2)^2 = (t+2)^3(t-3)^2$$

$$\lambda = 2 \quad m.a. = 3 \quad m.g. = 5 - rk(2I - A) =$$

$$= 5 - 3 = 2 \quad \Rightarrow A \text{ non diagonalizzabile.}$$

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 2k-1 & 2-k \\ 2k+1 & -k \end{pmatrix}$$

6

$$P_A(t) = t^2 - (k-1)t - 2(k+1)$$

$$\Delta = k^2 - 2k + 1 + 8k + 8 =$$

$$= k^2 + 6k + 9 = (k+3)^2$$

Se $k \neq -3$ le radici (cioè gli autovalori) sono reali distinte $\Rightarrow$ diagonalizzabile.

Se $k = -3$ le radici sono coincidenti

~~ma per $k = -3$~~

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

ma poiché gli autovalori sono coincidenti

A è diagonalizzabile se e solo se è già diagonale. $\Rightarrow A$ non è diagonalizzabile né in $\mathbb{R}$, né in $\mathbb{C}$.