

Geometria 16/4/15

$\sim$ relazione su insieme X è "le scelte di
due coppie $(x_1, x_2) \in X \times X$ per cui vale $x_1 \sim x_2$ "

$\sim$ di equivalenza:

- riflessiva: $x \sim x \quad \forall x$

- simmetrica: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

- transitiva: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

In tal caso $[x] = \text{"la classe di equiv. di } x"$
 $= \{y : y \sim x\}$

Fatto: $\{[x] : x \in X\} = X/\sim$
sono partizioni di X

insieme quoziente

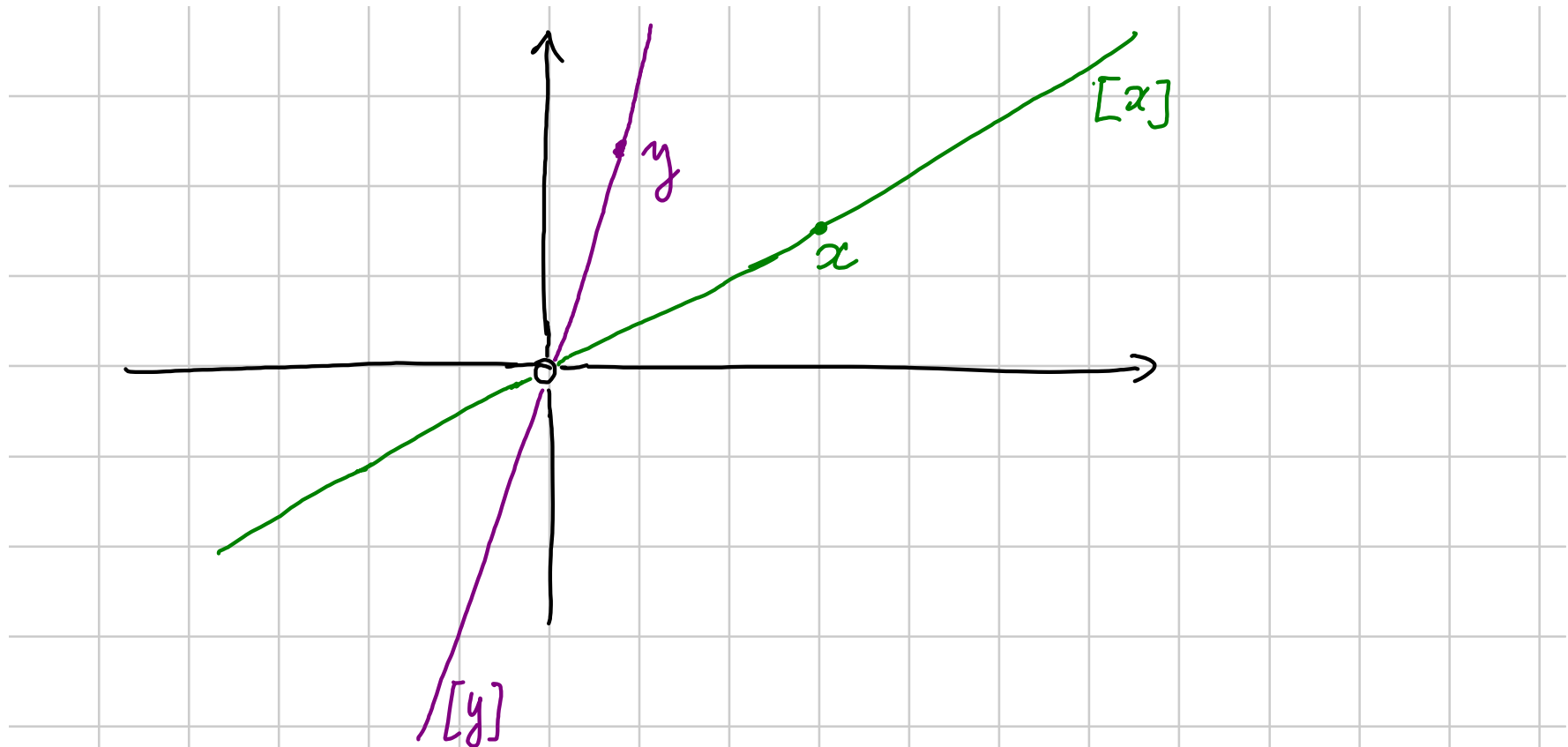
————— ◦ —————
 V sp. vett. su $\mathbb{K}$

Su $V \setminus \{0\}$ prendiamo $\sim$

$$x \sim y \text{ se } \exists k (\neq 0) \text{ t. c. } y = k \cdot x$$

$$(V \setminus \{0\}) / \sim = \text{spazio proiettivo associato a } V.$$

Classi di equivalenza :



$\Rightarrow$ le classi di equivalenze sono le rette di V

per l'origine privata dell'origine -

$$\underline{Oss}: \left\{ \begin{array}{l} \text{rette per } 0 \\ \text{tutto } 0 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{ \text{rette per } 0 \}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(V) = \left(\begin{array}{l} \text{l'insieme delle rette} \\ \text{per l'origine in } V \end{array} \right).$$

Def: chiamo spazio proiettivo su $\mathbb{K}$
 n -dimensionale $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$.

(Idea: siccome le rette di $\mathbb{K}^{m+1}$ diventano punti di $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{m+1})$, la dimensione cala di 1 $\Rightarrow$ logico pensare che $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{m+1})$ ha $\dim = m+1-1 = m$.)

Descriviamo $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ in piccolo —

$\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ = l'insieme delle rette in $\mathbb{R}$



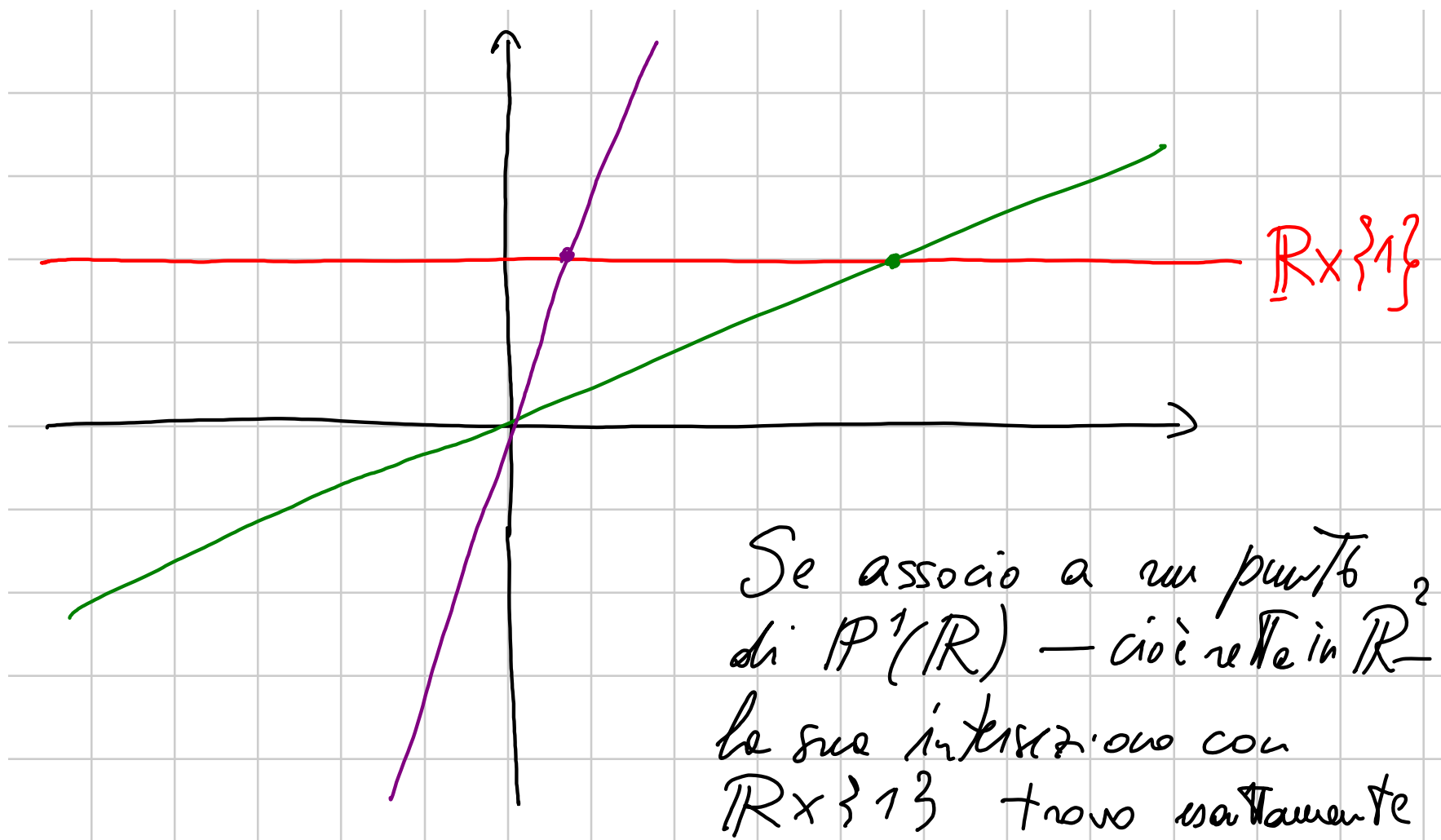
$\Rightarrow$ è un solo punto

(In generale: $\mathbb{P}^0(K) = \text{un punto.}$)

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

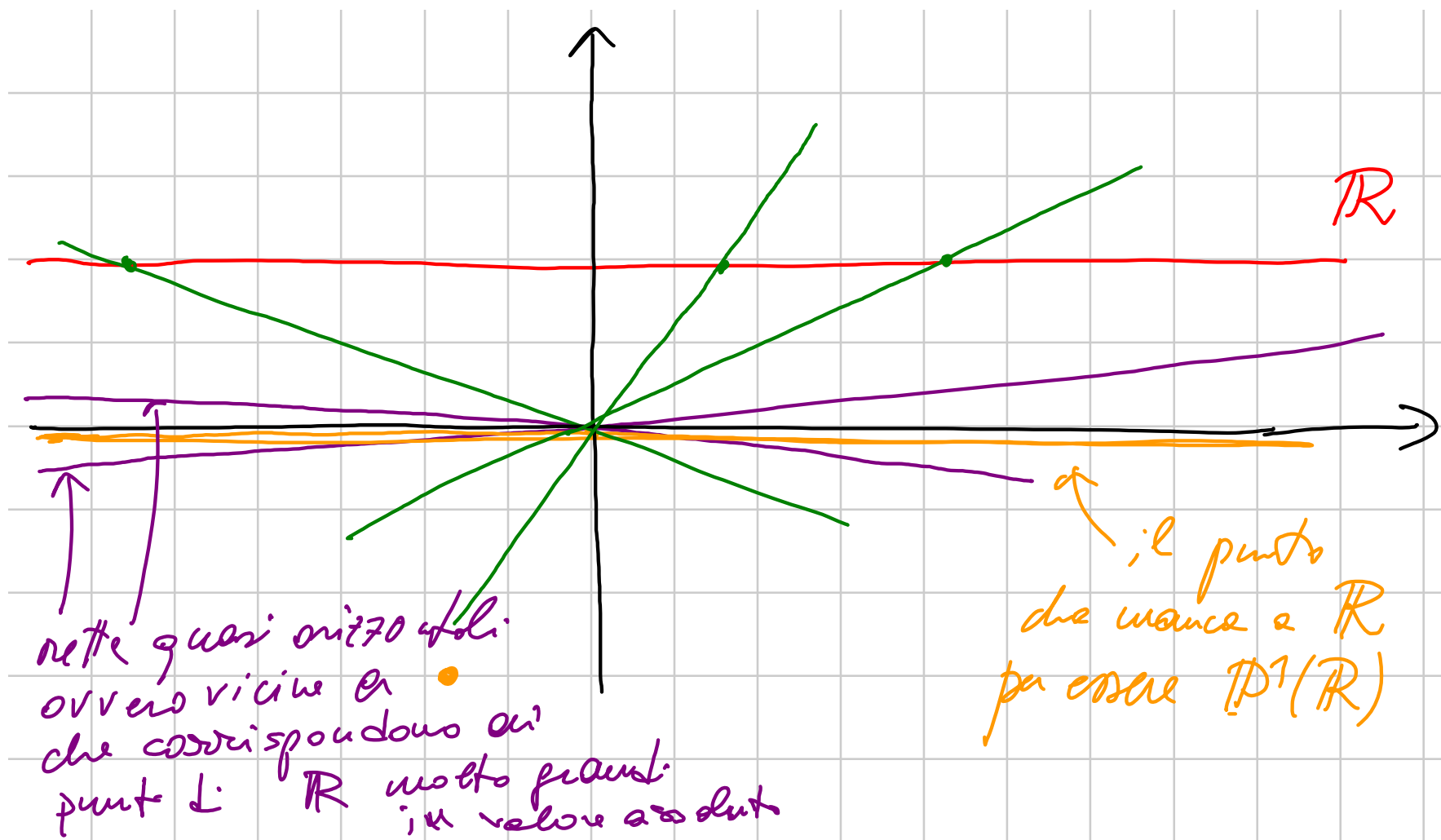
La descrizione (pseudo invicene di
rappresentanti "canonici"
e rapporto su cose usate)

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) =$ l'insieme delle rette per 0 in $\mathbb{R}^2$



un rappresentante di tutti i punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tranne le rette orizzontali;
ora identifichiamo $\mathbb{R} \times \{1\}$ a $\mathbb{R}$ e dunque ho

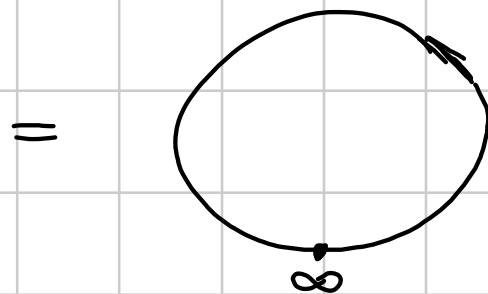
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\text{un punto}\}$$



(tendenti a ∞).

Allora: chiamiamo ∞ il punto che manca
a $\mathbb{R}$ per essere $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e

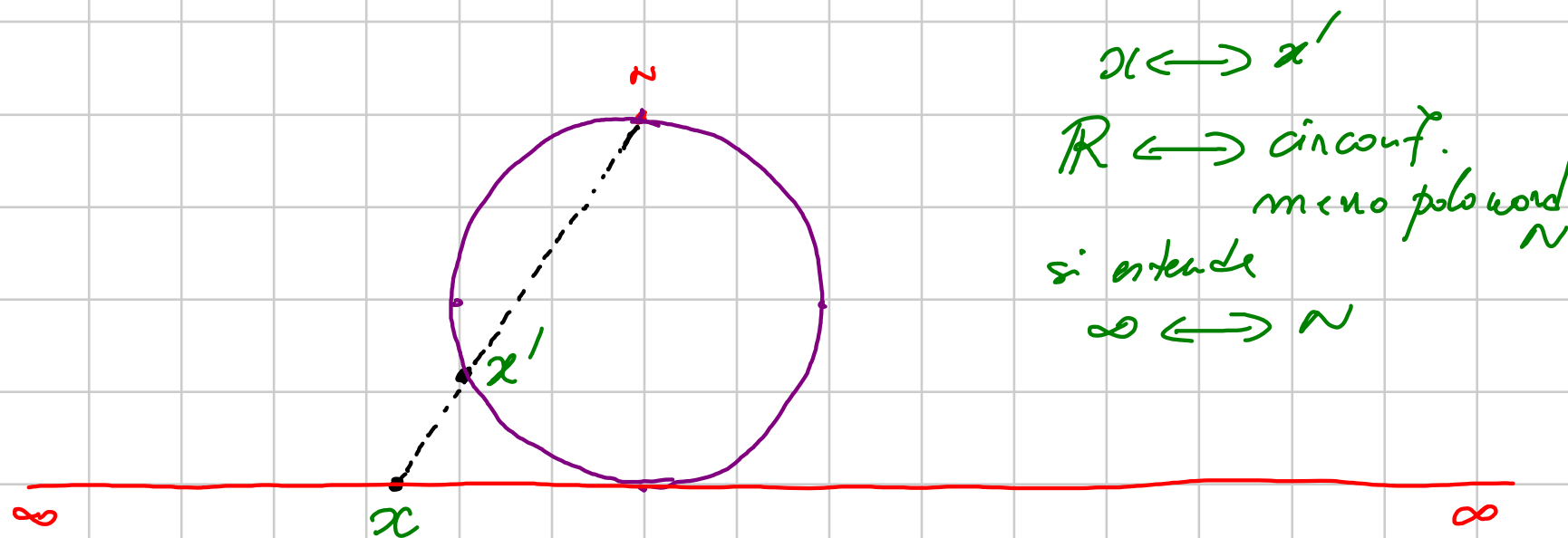
$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \cdots$  $\cdots$
completate con ∞ ai due estremi



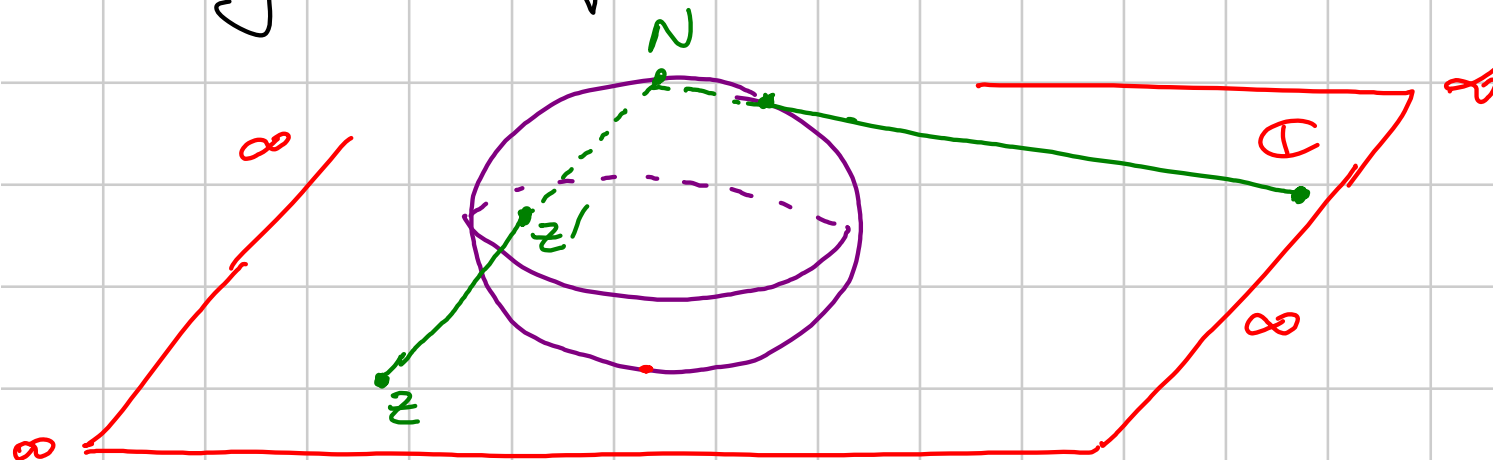
Corrispondenza tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$$

data dalla proiezione stereografica:



(Analogo complesso: $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
 dove ∞ rappresenta "tutti i punti di $\mathbb{C}$
 con modulo molto grande — tendente a ∞ " ;
 oppure una sfera 2-dim :

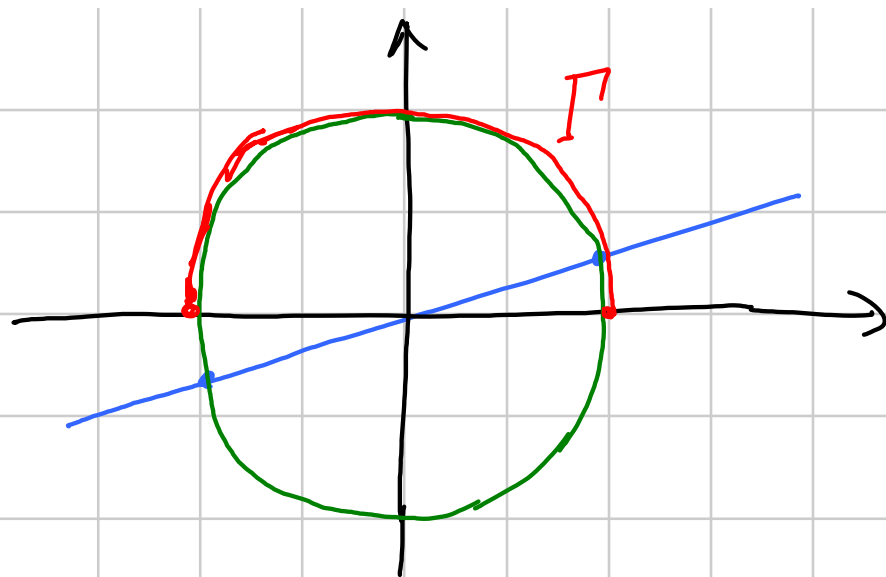


$$z \leftrightarrow z'$$

da $\mathbb{C} \leftrightarrow$ sfera meno N
 che si estende a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \leftrightarrow$ sfera
 $\infty \leftrightarrow N$)

II descrizione di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

(prendo insieme di
 rappresentanti sovrabbondanti
 e vedo cosa resta da
 identificare) —

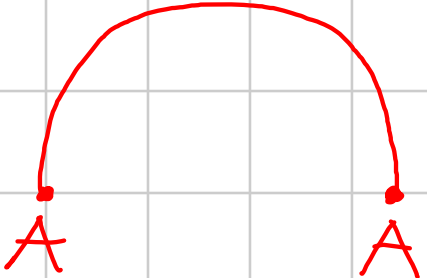


$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$$

interseca ogni classe
di equiv. in 2 pti

$$I = \{x \in S^1 : x_2 \geq 0\}$$

interseca ogni classe in 1 pto
tranne $\mathbb{R} \times \{0\}$ nei suoi
estremi (come caso $[0,1]$
per $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$)

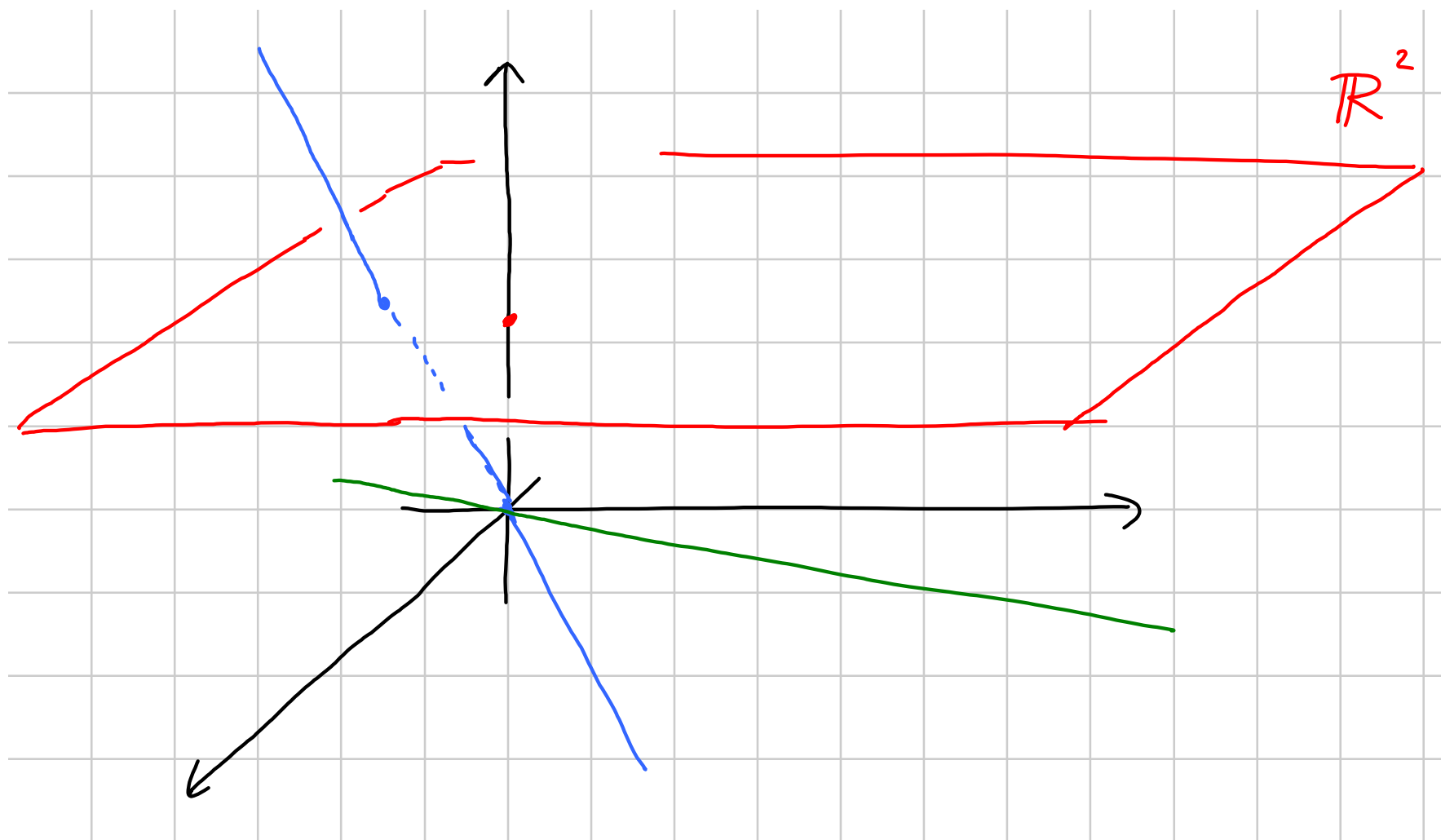
$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) =$  $=$ circonferenza.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Idescrizione:

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) =$ rette in $\mathbb{R}^3$

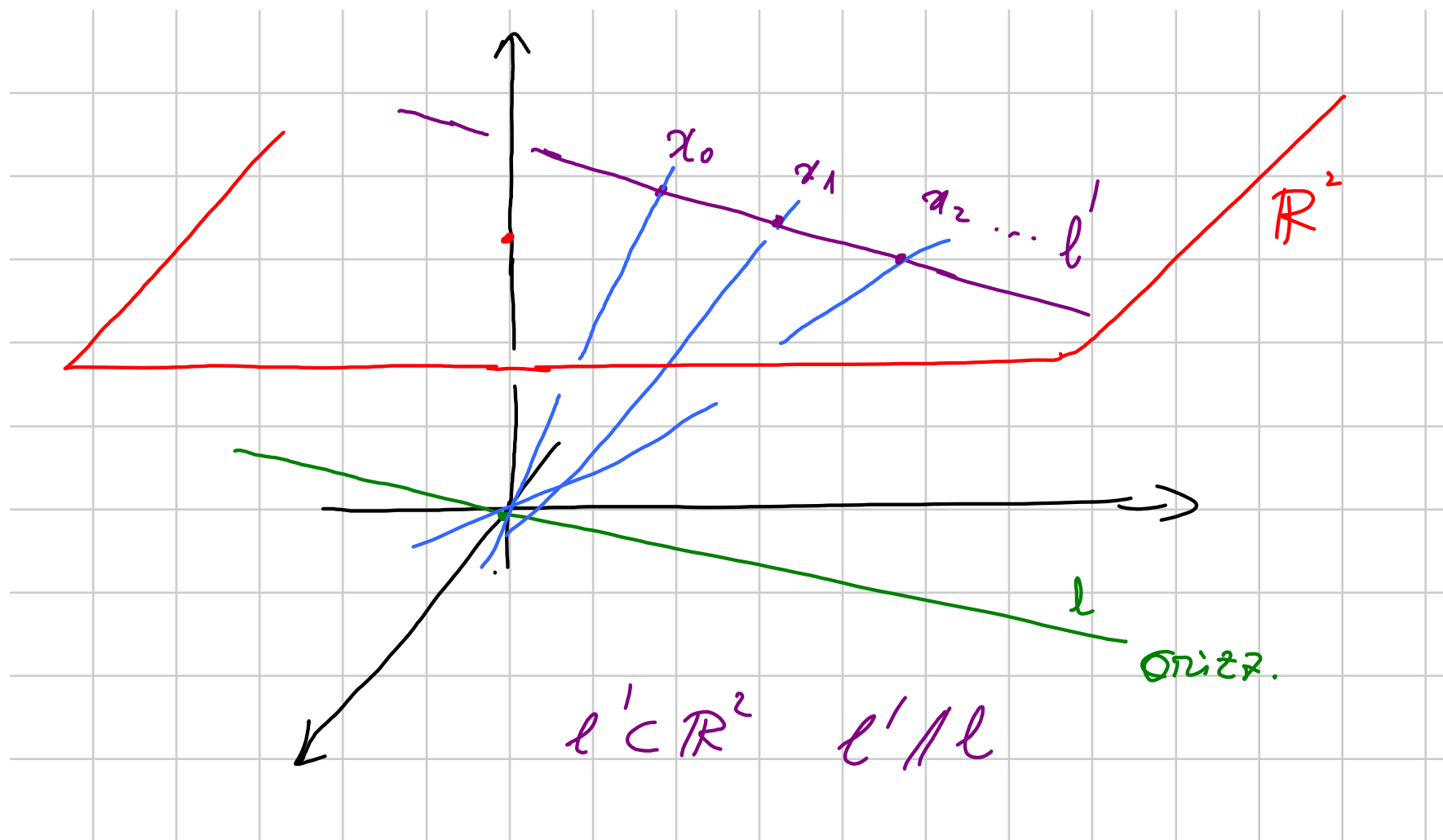
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3 \times \{1\}$ interseca tutte le
classi di equiv. tranne quelle orizzontali.



I punti che mancano a $\mathbb{R}^2$ per essere $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
sono le rette di $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ che sono $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

i punti all'infinito di $\mathbb{R}^2$



la retta passante per O e x_n con $x_n \in l'$
tendendo a ∞ , tende a l_{∞}

$$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}_{\text{punti all'infinito}}$$

punti all' ∞ = direzioni di rette (anche
affini) in $\mathbb{R}^2$

Attenzione: i due vetti di una retta affine in $\mathbb{R}^2$
definiscono lo stesso punto all' ∞ .

$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ con l'aggiunta dei punti
all'orizzonte infinito ma
identificando quelli opposti"



Foglio 27/3

Ese① : calcolare P_A/Pf etc...

$$② \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -3 & t-1 & 0 \\ -2 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)^3 + (t-1)(2-6) \\ &= (t-1)(t^2-2t+1-4) \\ &= (t-1)(t^2-2t-3) \\ &= (t-1)(t+1)(t-3) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = +1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 3$$

distinct $\Rightarrow \tilde{c}$ diapo :

$$W_1: \begin{cases} x + 2y - z = x \\ 3x + y = y \\ 2x + z = z \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$W_2: \begin{cases} x + 2y - z = -x \\ 3x + y = -y \\ 2x + z = -z \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2x + 2y \\ 3x + 2y = 0 \\ x + z = 0 \checkmark \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$W_3: \dots$

$$\textcircled{f} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-2 & -3 & 3 \\ 0 & t+1 & -3 \\ -2 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$= t^3 - 2t^2 - t + 2$$

$$+ 6t - 18$$

$$+ 6$$

$$= t^3 - 2t^2 + 5t - 10 = (t^2 - 5)(t - 2)$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{5} \quad \text{diag. on } \mathbb{R}$$

(autovettori ...)

$$\textcircled{9} \quad f: V \rightarrow V \quad V = \{x \in \mathbb{R}^3: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \cdot x$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -14 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -6$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -7$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -7$$

Autovettori di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, v_1, v_2

$$v_1: \begin{cases} -x - 4y = x \\ -3x - 5y = y \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2: \begin{cases} -x - 4y = -7x \\ -3x - 5y = -7y \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Autovettori di f w_1, w_2

$$w_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

② $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t] \quad f: V \rightarrow V$

$$f(p(t)) = p(3) + p(-2) \cdot t \quad \mathcal{B} = (1, t)$$

$$f(1) = 1 + t$$

$$f(t) = 3 - 2t$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 5 \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{21})$$

↪ diago ; autovett.

① $V = \{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : p(1) = 0 \}$

$$\mathcal{L}(p(t)) = (t-1) \cdot p'(t) + (t^2-1) \cdot p(-2) -$$

$$\mathcal{B} = (t-1, t^2-1)$$

$$\mathcal{L}(t-1) = (t-1) - 3(t^2-1)$$

$$\mathcal{L}(t^2-1) = (t-1)(2t) + (t^2-1) \cdot 3 = -2(t-1) + 5(t^2-1)$$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 6$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

$$P_f(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 1 \quad \lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$$

autovettori di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$:

$$v_{1,2}: x - 2y = (3 \pm \sqrt{10})x$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \pm \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

autovettori di f : $w_{1,2} = (-2)(t-1) + (2 \pm \sqrt{10})(t^2-1)$.

② $f: V \rightarrow V$; $W \subset V$, $f(W) \subset W$; $g: W \rightarrow W$, $f|_W = g$
 Prova che $p_g(t)$ divide $p_f(t)$.

Prendo B base di W e la completo a $\mathcal{C} = (B, \mathcal{D})$
 base di V ; allora

$$[f]_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} [g]_{\mathcal{B}} & X \\ \hline 0 & Y \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P_f(t) &= \det(t \cdot I_n - [f]_e^e) \\
 &= \det(t \cdot I_k - [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \cdot \det(t \cdot I_{n-k} - \chi) \\
 &= P_g(t) \cdot P_\chi(t)
 \end{aligned}$$

③ Quali sono gli autoval di f t.c.
 $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$? E se f è diagon?

$$\text{Ker}(f) \supset \text{Im}(f) \Rightarrow f \circ f = 0$$

$$\Rightarrow \text{se } f(v) = \lambda \cdot v \quad \text{ha} \quad 0 = f(f(v)) = \lambda^2 \cdot v$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

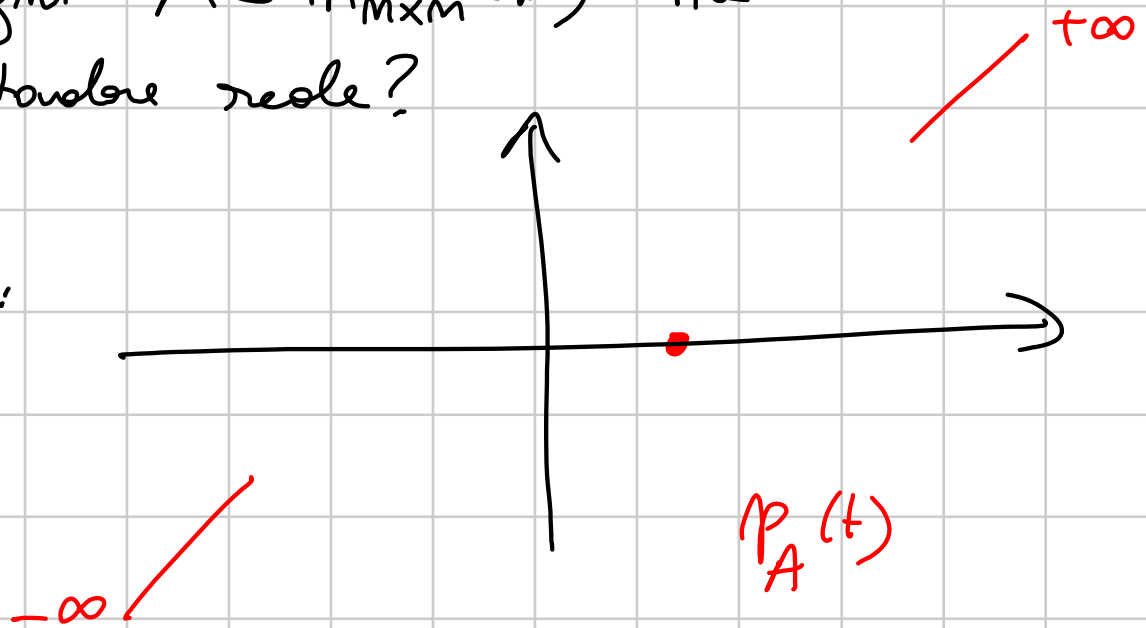
Può non essere nulla: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Ker}(A) = \text{Inv}(A) = \text{Spa}(e_1)$$

Se è di grado n è associata a 0 $\Rightarrow$ è 0

④ Per quali n ogni $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ha almeno un autovettore reale?

n dispari n :



n pari n :

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ \hline & & 0 & -1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ \hline & & & & 0 & -1 & & \\ & & & & 0 & 0 & & \\ \hline & & & & & & \ddots & \end{array} \right)$$

le autovalori solo $\pm i$

⑤ Date $A \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$ che legame c'è
tra la diagonalizzabilità di A e quella di ${}^t A$?

$$\overline{P_{{}^t A}(\lambda)} = \det(\lambda \cdot I_m - {}^t A) = \det(\lambda \cdot I_n - A) \\ = P_A(\lambda)$$

$\Rightarrow A, {}^t A$ hanno stessi autovalori con
le stesse mult. algebriche

$$\text{m.g.}(\lambda \text{ risp. a } {}^t A) = \dim(\text{Ker}(\lambda \cdot I_m - {}^t A))$$

$$= m - \text{rank}(\lambda \cdot I_m - {}^t A)$$

$$= m - \text{rank}(\lambda \cdot I_m - A)$$

$$= \text{m.g.}(\lambda \text{ risp. ad } A)$$

$\Rightarrow$ tutti gli autoval. hanno lo stesso m.g.

Dimostrate: ${}^t A \text{ diago} \iff A \text{ diago.}$

⑥ Dato $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ con $p_A(t)$ avente solo radici reali e diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, provare che A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Via diretta: provateci

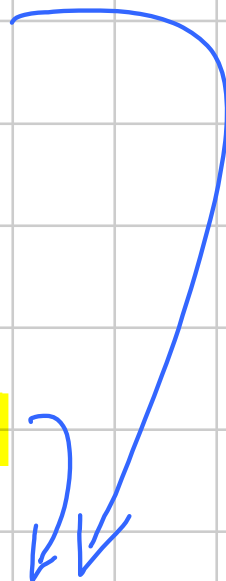
Via indiretta: devo provare che per ogni
radice di $p_A(t)$ ho che
 $m.g.(\mathbb{R}) (\lambda) = m.a. (\lambda)$.

$$m.g.^{(\mathbb{R})}(\lambda) = \dim_{\mathbb{R}} (\text{Ker}(\lambda \cdot I_n - A))$$

$$= n - \text{rank}_{\mathbb{R}}(\lambda \cdot I_n - A)$$

$$m.g.^{(\mathbb{C})}(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} (\text{Ker}(\lambda \cdot I_n - A))$$

$$= n - \text{rank}_{\mathbb{C}}(\lambda \cdot I_n - A)$$



Sono uguali perché
si trovano calcolando dei
determinanti

Infine so che $m.g.(\lambda) = m.a.(\lambda)$
perché A è diago $\text{su } \mathbb{C} \Rightarrow \text{OK}$.
