- Chiusa $\Rightarrow$ esatta? NO

(Esistono forme chiuse non esatte)

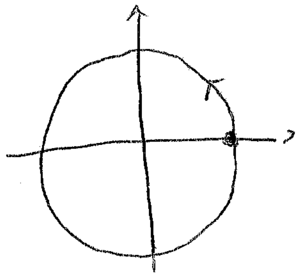
ES $\omega = \dfrac{+x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} = \Omega$

è chiusa: $d\omega = \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)\right] dx\,dy =$

$$= \left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] dx\,dy = 0 \quad ✓$$

Non è esatta: $\alpha(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$

è una curva chiusa. Se ω fosse esatta avrei $\int_\alpha \omega = 0$, invece



$$\int_\alpha \omega = \int_\alpha \frac{-y\,dx + x\,dy}{(x^2+y^2)} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t}{\cos t^2 + \sin t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$ quindi ω non è esatta.

- Che interpretazione geometrica ha $\omega = \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$?

Un punto $(x,y) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ si scrive in coordinate polari come (ρ, θ), con $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ – $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ è ben determinato. θ è determinato solo a meno di multipli di 2π.

Per esempio posso scegliere:

$y>0$	$\theta = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right) + 2k\pi$
$y<0$	$\theta = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right) + \pi + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

o anche

$x<0$	$x>0$
$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi+2k\pi$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+2k\pi$
$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi+2k\pi$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+2k\pi$

$$\Rightarrow \quad d\theta = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)dy =$$

$$= \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dx + \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dy =$$

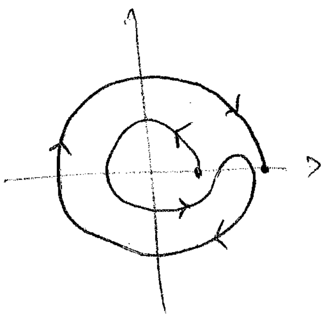
$$= \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{d\omega = 0} \qquad (\text{perché } dd\theta = 0)$$

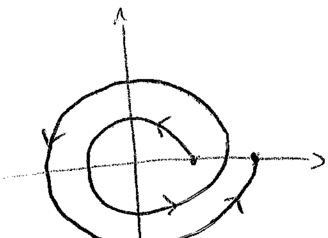
e

$$\boxed{\int_\alpha \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \text{variazione totale di } \theta \text{ lungo } \alpha}$$

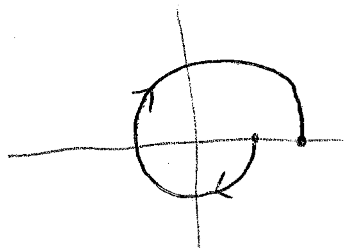
es di calcolo di $\int_\alpha \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$:



0



4π



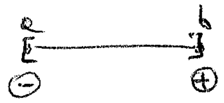
-2π

Cioè conto, con il segno, il numero di giri attorno all'origine (per α curva chiusa).

Tuttavia chiusa $\Rightarrow$ esatta <u>aggiungendo un'ipotesi su Ω</u>.

<u>Teo</u> (fond. del calcolo integrale)

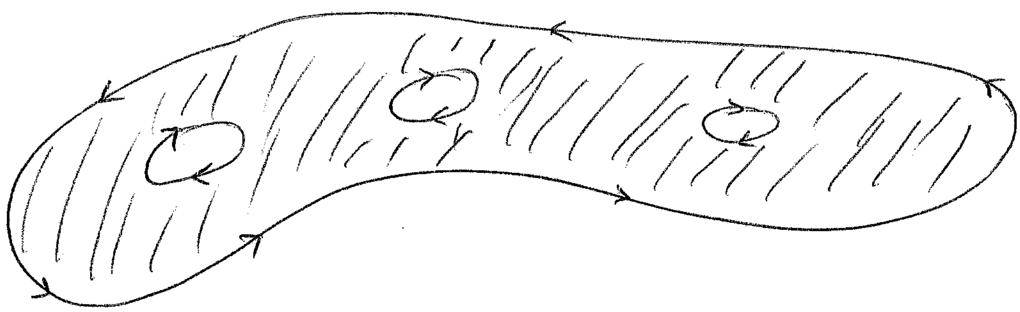
$$\underbrace{\int_a^b F'}_{\text{integrale di } F' \text{ su } [a,b]} = \underbrace{F(b) - F(a)}$$



valutazione di F agli estremi di $[a,b]$, cioè al "bordo" del segmento.

Definiamo un analogo 2D del bordo orientato:

<u>Def</u> Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, supponiamo che $\partial\Omega$ sia unione di curve regolari a tratti, chiamiamo <u>bordo</u> <u>orientato</u> di Ω l'insieme di tali curve orientate in modo da lasciare Ω a sinistra.

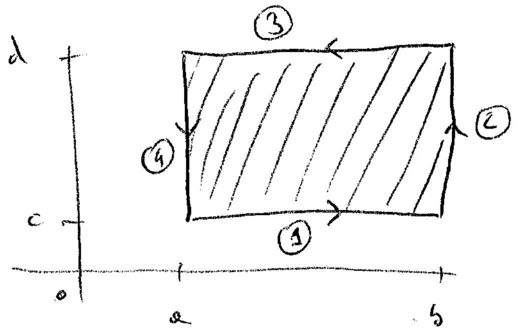


<u>Teorema</u> (Gauss-Green) se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è aperto limitato con bordo unione finita di curve regolari a tratti, se ω è una 1-forma definita su un aperto che contiene $\Omega \cup \partial\Omega$ allora

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

<u>Dim</u>. Facciamo per un rettangolo $[a,b]\times[c,d]$

$\omega = f\,dx + g\,dy$



$$\int_{\partial A}\omega = \int_{①} + \int_{②} + \int_{③} + \int_{④} =$$

$$= \underbrace{\int_a^b \left(f(t,c)\cdot 1 + g(t,c)\cdot 0 \right) dt}_{①} + \dots =$$

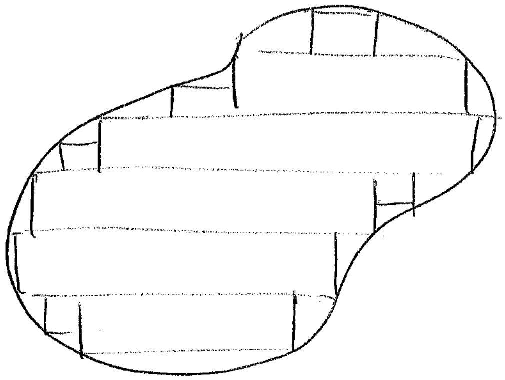
$$= \int_a^b f(t,c)\,dt + \int_c^d g(b,t)\,dt + (-1)\int_a^b f(t,d)\,dt + (-1)\int_c^d g(a,t)\,dt =$$

$$= -\int_a^b \left(f(t,d) - f(t,c) \right) dt + \int_c^d \left(g(b,t) - g(a,t) \right) dt =$$

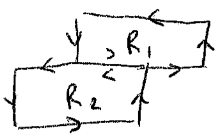
$$= -\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(t,z)\,dz \right) dt + \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(z,t)\,dz \right) dt =$$

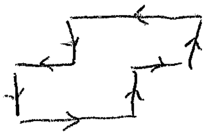
$$= \int_a^b \int_c^d \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_\Omega d\omega$$

OK per rettangolo. Per Ω qualsiasi approssimo Ω con unione di rettangoli



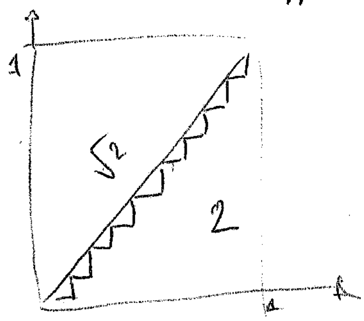
(i lati interni si cancellano:



$\simeq$

)

<u>OSS</u> È un fatto (non ovvio) che l'integrale su una spezzata (i pezzi di bordo dei rettangoli) approssima l'integrale su $\partial\Omega$.

In altri contesti una tale approssimazione non vale; es. la lunghezza di un segmento non può essere calcolata approssimando con spezzate:

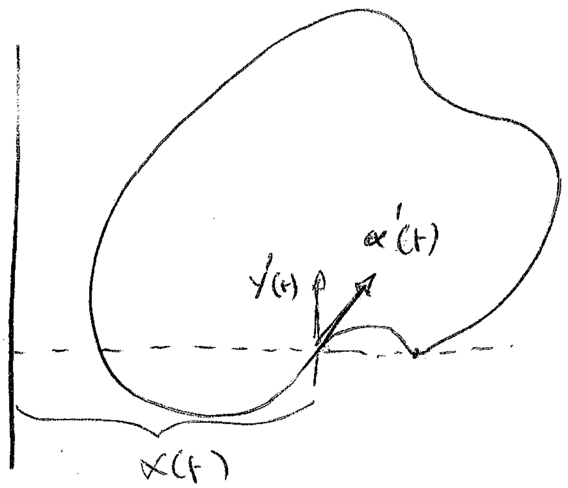


G-G: $\displaystyle\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$

<u>Corollario</u> (Ω come prima)

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} x\,dy}_{} = -\int_{\partial\Omega} y\,dx = \text{Area}(\Omega) = \int_{\Omega} dx\,dy$$

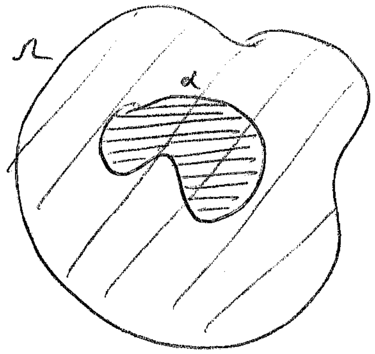
l'integrale sul bordo con scelto di trovare l'area.



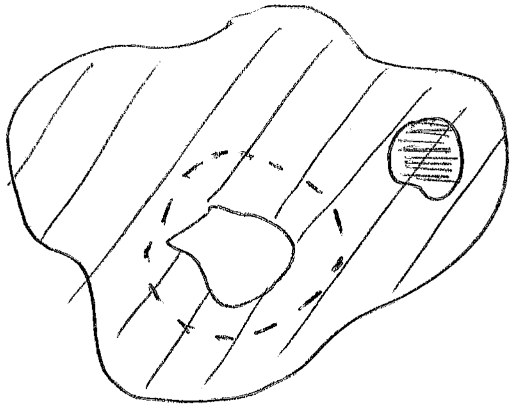
$$\int_a^b x(t)\cdot y'(t)\,dt = \text{area}$$

Def $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto si dice **semplicemente connesso** se ogni curva semplice chiusa α contenuta in Ω è bordo di un aperto contenuto in Ω.

ES



"SENZA BUCHI"
SEMPLICEMENTE CONNESSO



"CON BUCHI"
NON SEMPL. CONNESSO

Teo Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso allora ogni 1-forma ~~esatta~~ chiusa è anche esatta.

DIM Basta vedere che $\int_\alpha \omega = 0$ per ogni α chiusa.

Possiamo supporre α semplice.

Per ipotesi $\alpha = \partial A$, $A \subset \Omega$ e quindi

per G-G $\int_\alpha \omega = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = 0$ perché $d\omega = 0$ (chiusa) $\boxtimes$

Quindi, per ω su Ω

1) ω esatta $\Rightarrow$ ω chiusa
2) ω chiusa $\Rightarrow$ ω esatta se Ω è s.c.
3) se Ω non è s.c. esistono forme chiuse non esatte.

es: $\dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ è chiusa, non esatta.