

A meno di isometrie ;

a meno di

parabola $y = ax^2$

affinità $y = x^2$

ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 1$

iperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

$x^2 - y^2 = 1$

oss le coniche sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

definiti da polinomi di II grado -

Un generico polinomio di grado II ^{in $\mathbb{R}^n$} può essere scritto come

$${}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} Q & p \\ t & c \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, Q ($\in A$) simmetrica

In $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

$d_1 = (Q_{11})$

$d_2 = \det \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$

$d_3 = \det(A)$

(*) $Q_{11}x_1^2 + 2Q_{12}x_1x_2 + Q_{22}x_2^2 + 2Q_{13}x_1 + 2Q_{23}x_2 + Q_{33} = 0$

Teo se $d_3 \neq 0$ il luogo definito da (*)
a meno di trasformazioni affini è:

• se $d_2 = 0$ $x_2 = x_1^2$ (parabola)

• se $d_2 < 0$ $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (iperbole)

• se $d_2 > 0$ $\nearrow$ se $d_1 d_3 > 0$ $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$
(vuoto)

$\searrow$ se $d_1 d_3 < 0$ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (ellisse)

es. $7x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 7y + 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3/2 & -5/2 \\ -3/2 & 2 & 7/2 \\ -5/2 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 7 > 0$$

$$d_2 = 14 - 81/4 < 0$$

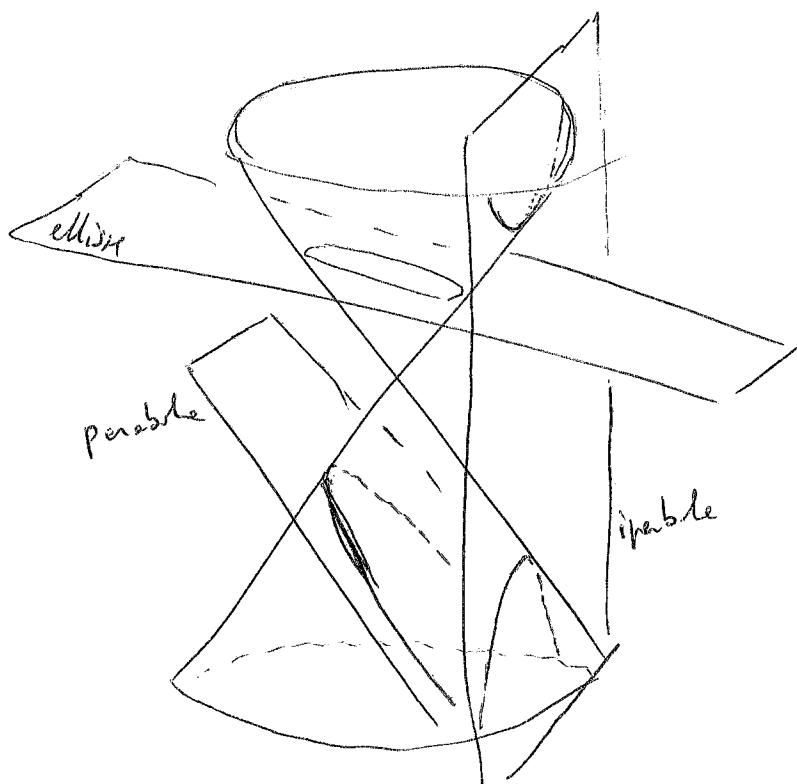
$$d_3 = 14 - \cancel{14} \dots \neq 0$$

Se $\det(A) = 0$ (degenere) a meno di affinità:

- un punto $x^2 + y^2 = 0$
- una retta $x^2 = 0$
- due rette parallele $x^2 = 1$
- due rette incidenti $xy = 0$

Questi sono tutti i casi possibili ed è sempre possibile capire dall'equazione in che caso ci si trova.

Le coniche si ottengono tutte (anche deg., eccetto due rette parallele) come intersezione di cono $x^2 + y^2 = z^2$ con un piano



Spazi proiettivi

4

(la dimostrazione della classificazione delle coniche, oltre che delle "quadriche" = analogo in $\mathbb{R}^3$ delle coniche segue)

Def Sia S un insieme. Una relazione su S è un sottoinsieme $R \subset S \times S$ (cioè una scelta di coppie ordinate). Invece di scrivere $(x, y) \in R$ diciamo $x R y$.

Esempio $S = \{\text{aeroporti europei}\}$

$R = \text{c'è un volo da } - \text{ a } -$

$(\text{Pise}, \text{Stoccolme}) \in R$ se c'è un volo da Pise a Stoccolme.

di solito c'è anche il ritorno, ma non è richiesto:
se c'è scriviamo $(\text{Stoccolme}, \text{Pise}) \in R$

Def una relazione R su S è

- riflessiva se $x R x \quad \forall x \in S$
- simmetrica se $x R y \Rightarrow y R x$
- transitiva se $x R y \text{ e } y R z \Rightarrow x R z$
- di equivalenza se riflessiva, simmetrica e transitiva

Es. Sono rel. di equivalenza:

$$S = \{ \text{mai più oggi in aula} \}$$

- avere la stessa iniziale del cognome
- essere nati lo stesso mese

Invece "c'è un volo da - a -" non è di equivalenza, altrimenti non si farebbe mai scalo.

Es $S = \mathbb{R} \quad R \quad xRy \quad \text{se} \quad x-y \in \mathbb{Z}$

è di equivalenza

$$xRx \quad ? \quad x-x=0 \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

$$xRy \stackrel{?}{\Rightarrow} yRx \quad ; \quad x-y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

$$xRy, yRz \stackrel{?}{\Rightarrow} xRz \quad x-y \in \mathbb{Z}, y-z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-y+y-z = x-z \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

Def una relazione R in S è

• antisimmetrica se $xRy \text{ e } yRx \Rightarrow x=y$

• di ordine (parziale) se rifl., antisimmetrica, transitiva.

Es (1) $S = \mathbb{R} \quad , \quad R = \leq \quad \text{è d'ordine}$

$$x \leq x \quad \checkmark$$

$$x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x=y \quad \checkmark$$

$$x \leq y \text{ e } y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad \checkmark$$

$\leq$ su $\mathbb{R}$ è ordine totale

6

cioè è sempre vero $x \leq y$ o $y \leq x$

Es (2) $S =$ i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Z}$

relaz $\subseteq$

• $A \subseteq A$ ✓

• $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ✓

• $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ ✓

è relazione d'ordine

Non è totale: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{-1, 0, 7\}$

non sono confrontabili -

Da ora in poi consideriamo S insieme
con $\sim$ relazione di equivalenza su S -

(es. $S =$ noi oggi $\sim =$ stessa iniziale

Collegero $\sim$ Carli, Collegero $\not\sim$ Rossi)

Def classe di equivalenza di $x \in S$ l'insieme

$$[x] := \{ y \in S : y \sim x \}$$

Prop

Le classi di equivalenza sono una
partizione di S , cioè:

7

- 1) la loro unione è tutto S
- 2) due classi distinte sono disgiunte

Dim

1) $x \in [x]$ perché $x \sim x$ (riflessiva)

2) se $z \in [x] \cap [y]$ allora

$z \sim x$, $z \sim y$ e per sim. e trans.

$$x \sim y$$

$$w \in [x] \Rightarrow w \sim x \Rightarrow w \sim y \Rightarrow w \in [y]$$

quindi $[x] \subseteq [y]$ e analogamente

$y \sim x$ quindi vale anche $[y] \subseteq [x]$

$$\Rightarrow [x] = [y]$$

Q

Def chiamo quotiente di S rispetto a $\sim$
l'insieme $S/\sim$ delle classi di equivalenza -

In $S/\sim$ tutti gli elementi di S equivalenti tra
loro diventano un solo elemento -

Passare al quoziente significa identificare tra loro
gli elementi equivalenti tra loro.

Def La mappa

$$\pi: S \longrightarrow S/\sim$$

$$x \longmapsto [x]$$

è detta proiezione.

Es

$S = \text{noi}$

$\sim = \text{iniziale}$

$$\pi(\text{Callegaro}) = \underbrace{\{\text{Callegaro, Carli, ...}\}}$$

(sottoinsieme di S

elemento di $S/\sim$

Come possiamo descrivere un quoziente?

- scelgo un insieme di "rappresentanti" = uno ed uno solo per ogni classe

- scelgo un "nome" per ogni classe di equivalenza (nomi distinti per classi distinte)

Es

$S = \text{noi}$

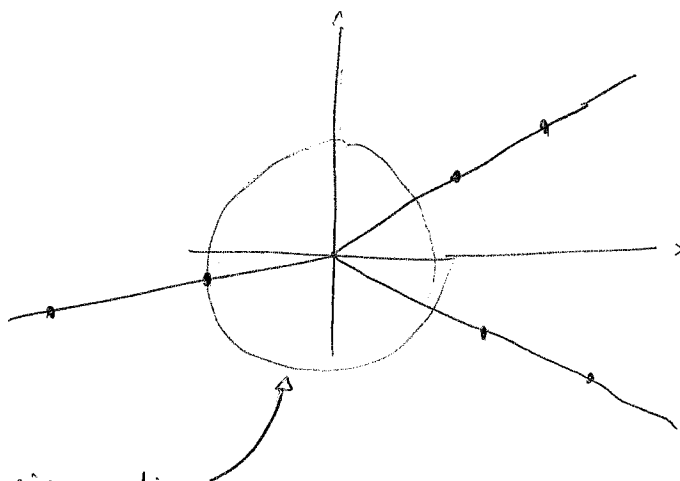
$\sim = \text{metti lo stesso mese}$

rappresentanti : scelgo per esempio il primo in ordine alfabetico tra quelli che metti lo stesso mese

nome : il nome del mese -

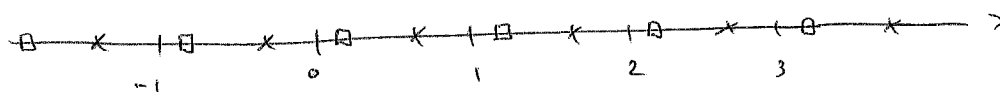
Es $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$x \sim y$ se x e y sono sulle stesse
semirette per l'origine



insieme di
rappresentanti : $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \sim$ si identifica in modo naturale
con la circonferenza unitaria -

Es su $\mathbb{R}$ $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Z}$



$\xrightarrow{\quad} [0,1)$ insieme di
rappresentanti

$[0, x)$

$x [0, x)$

$\rightarrow$ le classi sono vicine, ma
non lo vedo in $[0,1)$

Alternativa:

prendo $[0,1]$

$\xrightarrow{\quad}$

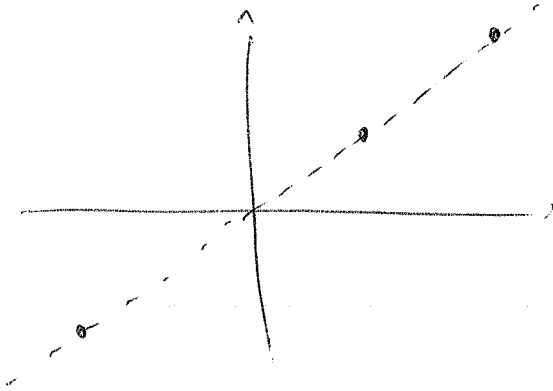
(insieme di rappresentanti
un po' sovrabbondante)

e mi ricordo che 0 e 1 sono identificati.

$$\mathbb{R}/\sim = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad \quad | \\ A \quad \quad A \end{array} = \text{---} \bigcirc \text{---}$$

Def Sia $V = \text{sp. vett. su } \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ quasi sempre), con $\dim_{\mathbb{K}}(V) \geq 1$. Definisco su $V \setminus \{0\}$, la relazione $x \sim y$ se $\exists k \in \mathbb{K} : y = k \cdot x$

Fatto è rel. di equivalenza.



$x \sim y$ quando
stanno in una stessa
retta in V per o.

Verifichiamo che è rel. di equivalenza:

- rifl. $x \sim x$? $x = 1 \cdot x$ ✓

- simm. $x \sim y \stackrel{?}{\Rightarrow} y \sim x$

se $y = k \cdot x$ e $x \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$ e

dunque $x = \frac{1}{k} \cdot y \Rightarrow y \sim x$ ✓

- $x \sim y, y \sim z \stackrel{?}{\Rightarrow} x \sim z$

~~se~~ $y = k \cdot x$ e $z = h \cdot y$ ($h, k \in \mathbb{K}$)

$\Rightarrow z = (kh) \cdot x \Rightarrow x \sim z$ ✓