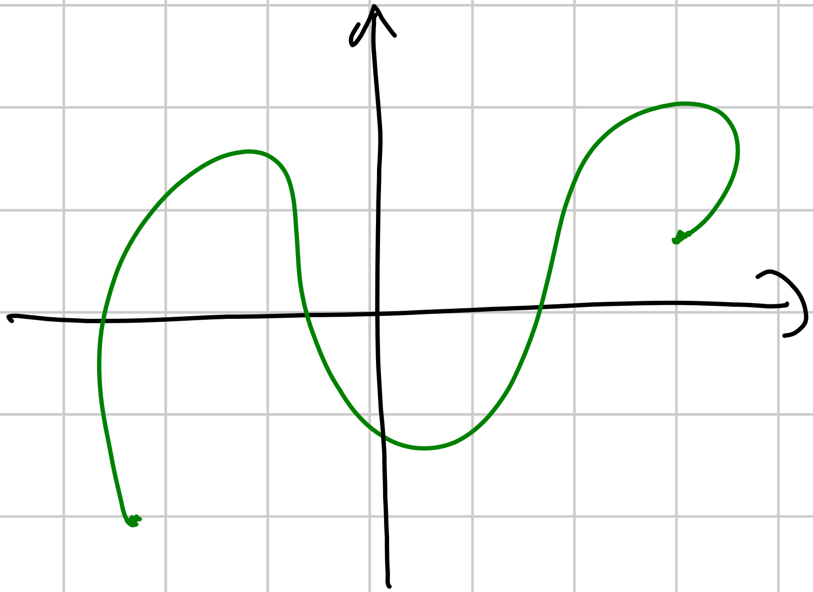
Geometria 13/5/15



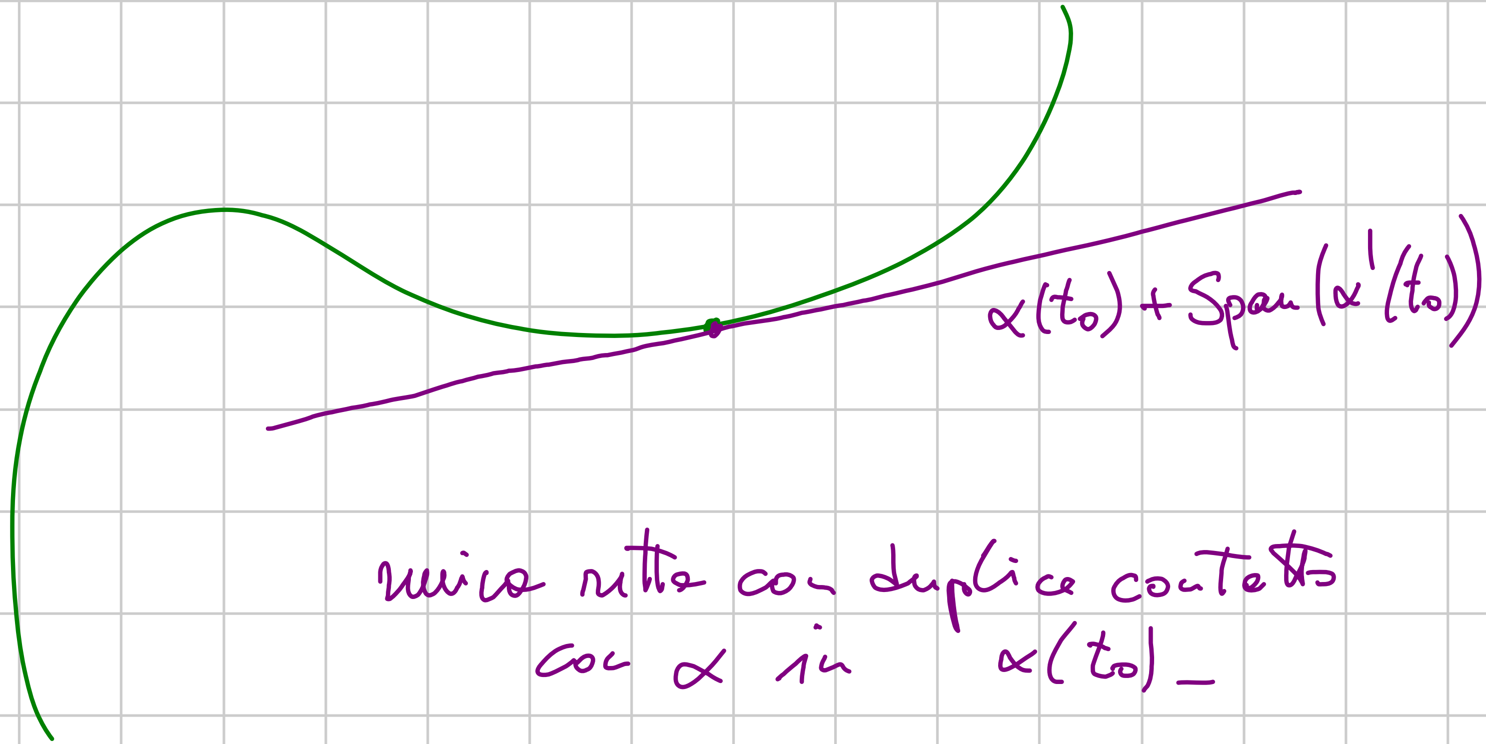
Curve parametrizzate regolari:

$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

derivabile con

$\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t$

Ciò garantisce esistenza di rette tangenti:

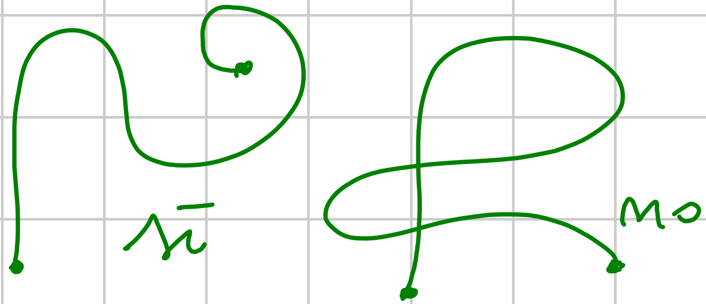


unica retta con duplice contatto con α in $\alpha(t_0)$.

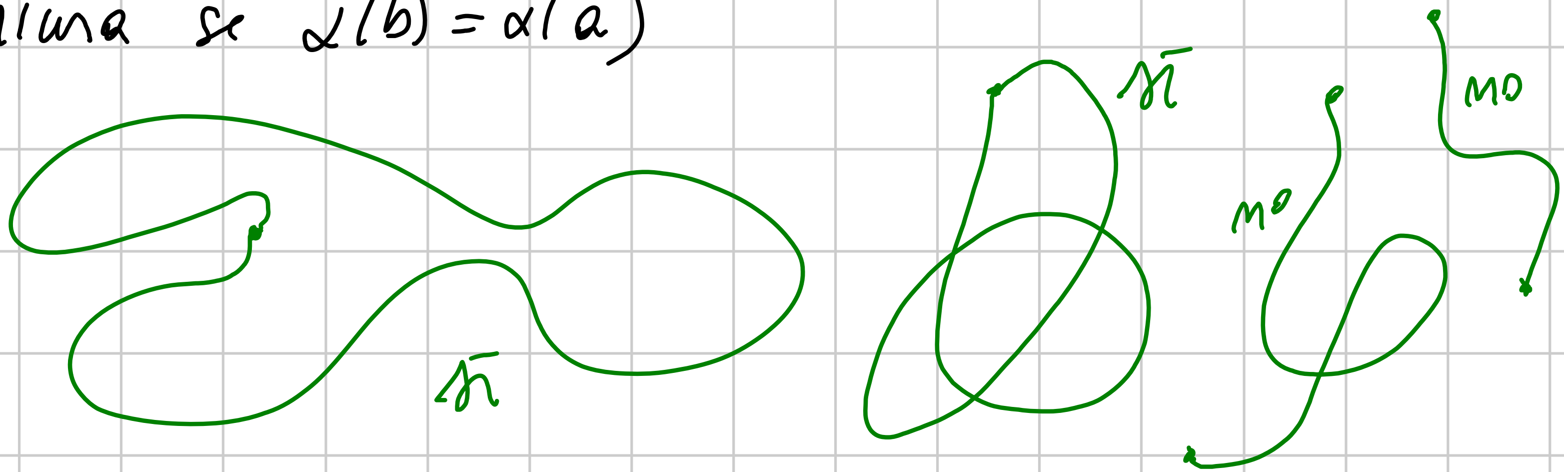
<u>Oss</u>: invece che $[a,b]$ vanno bene semirette o $\mathbb{R}$.

Def: una curva $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è:

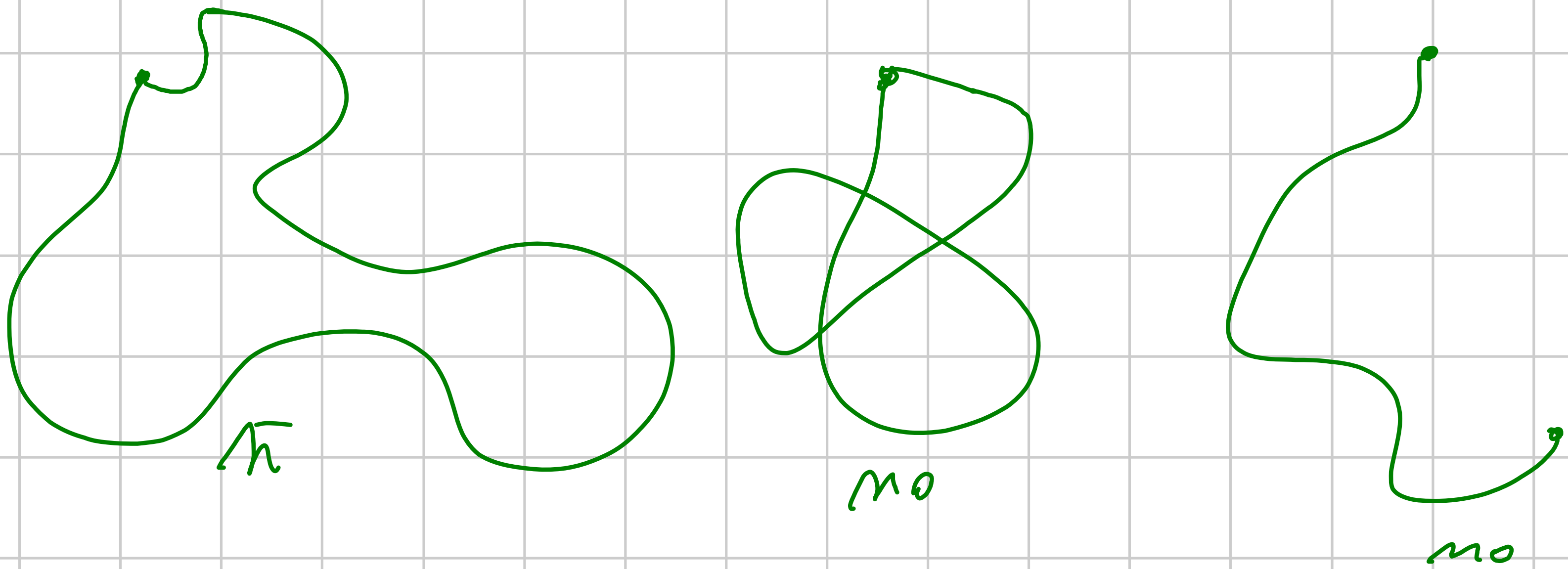
- semplice se è iniettiva



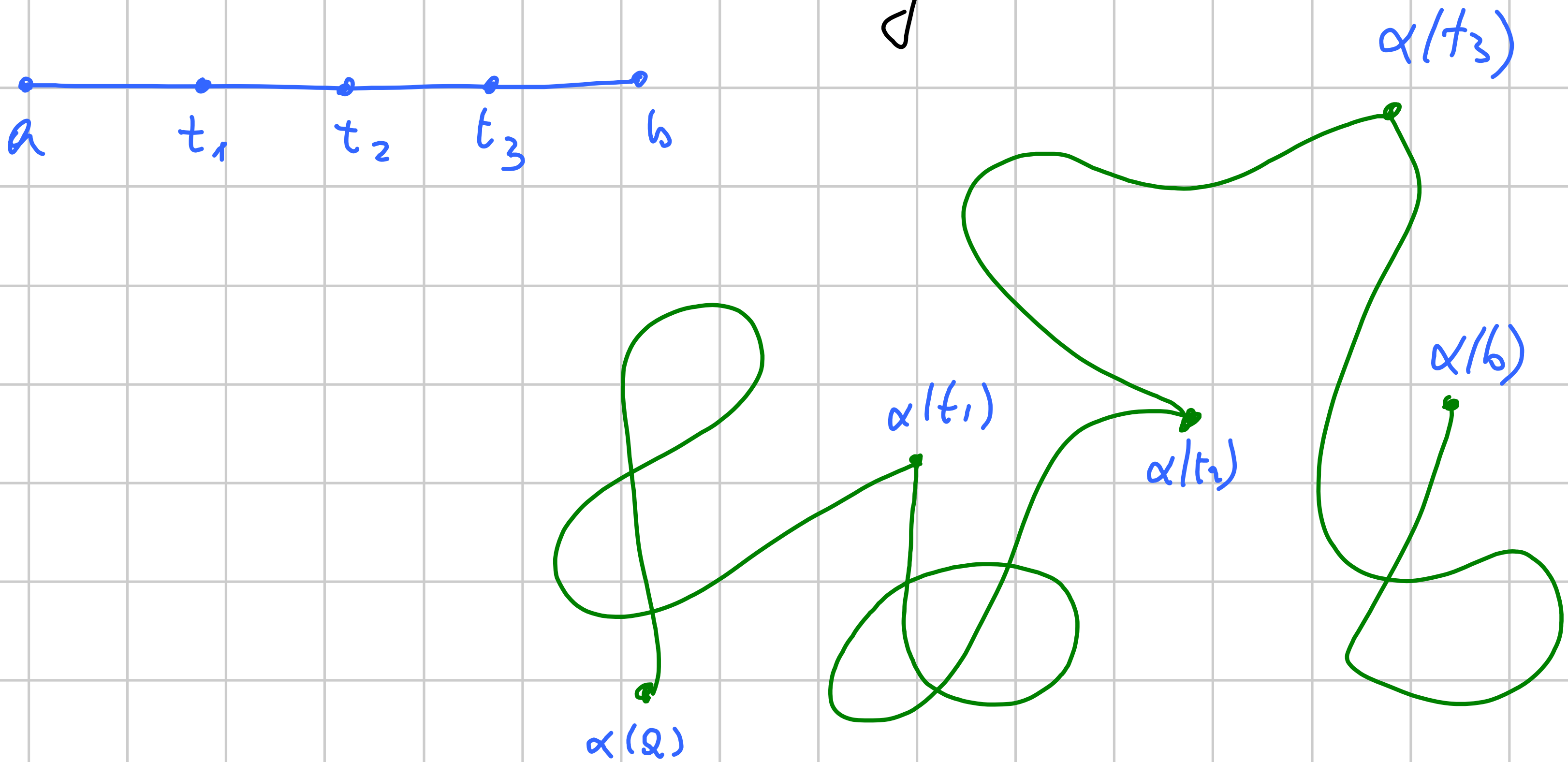
- chiusa se $\alpha(b) = \alpha(a)$



- semplice e chiusa se $\alpha(b) = \alpha(a)$ e α è iniettiva su $[a,b)$:

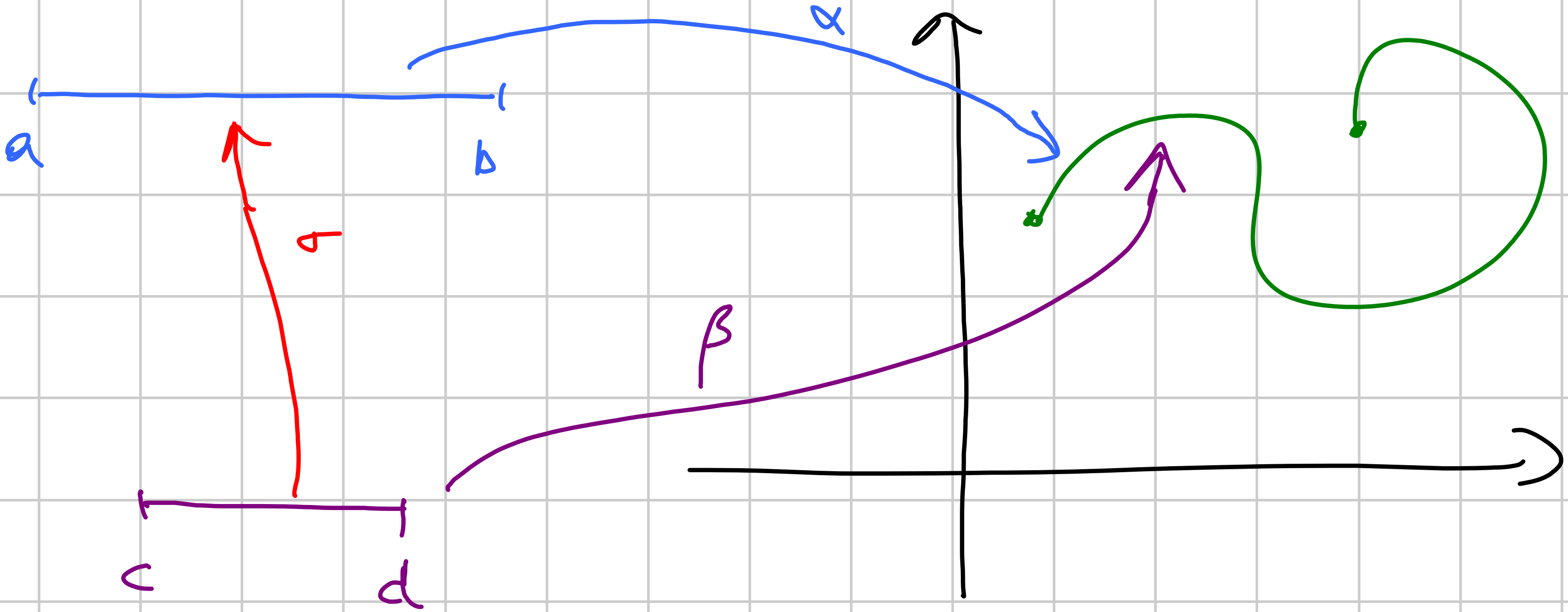


- è regolare a tratti se è ottenuta concatenando curve regolari:



Ho introdotto parametrizzazione per formalizzare l'idea di curva: ora metto libro.

<u>Def</u>: due curve $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$
$\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$
si dicono ottenute l'una dall'altra tramite <u>cambio di parametro</u> se esiste
$\sigma : [c,d] \to [a,b]$ bigettiva derivabile con inversa derivabile t.c.



$$\beta = \alpha \circ \sigma$$

Chiamo <u>supporto</u> di α la sua immagine.

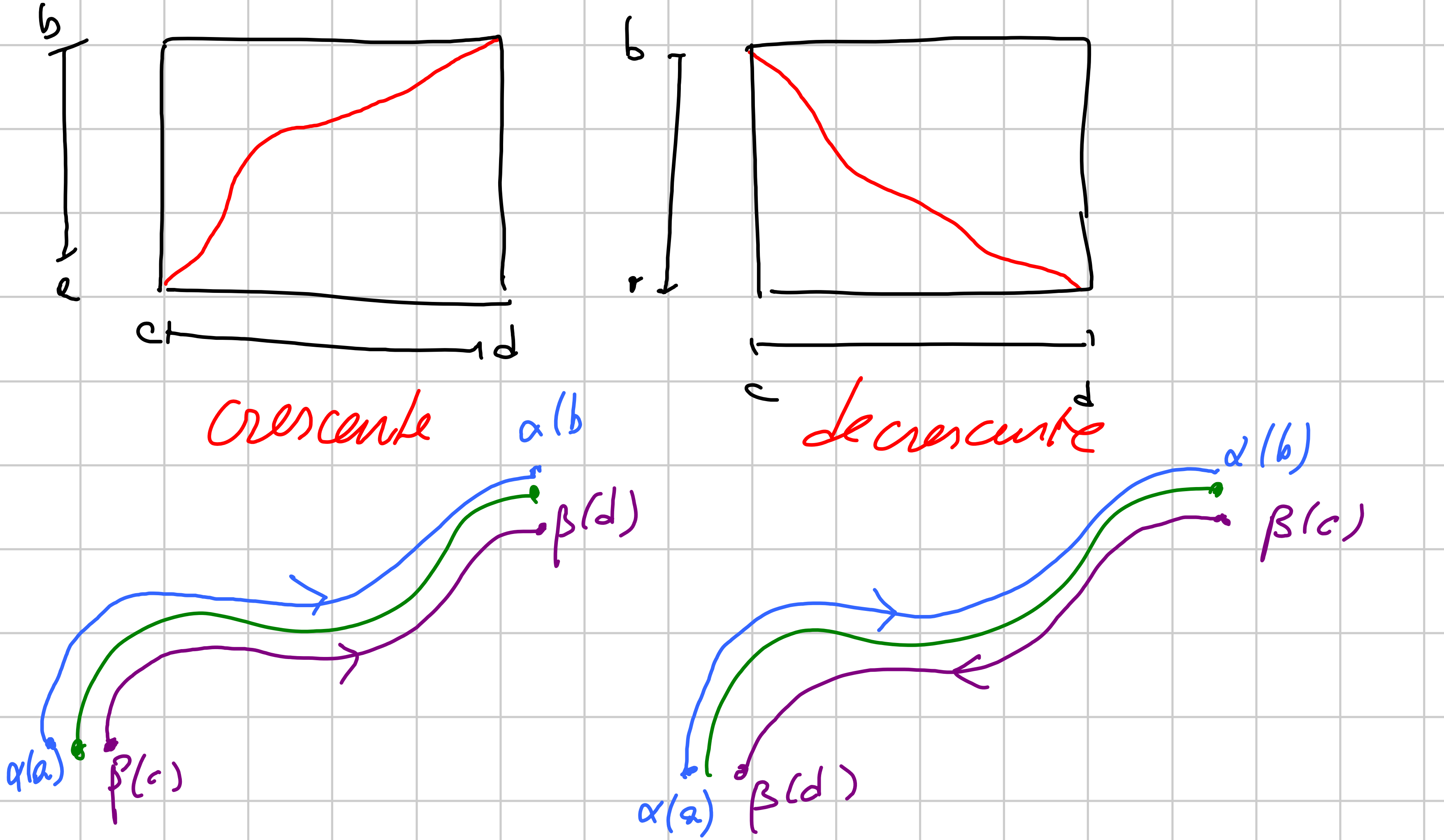
<u>Oss</u>: α e β hanno lo stesso supporto.

"Curve non parametrizzate" $\longleftrightarrow$ Supporto di una curva

$\updownarrow$

Classe di equivalenza di curve a meno di cambio di parametro.

<u>Oss</u>: il cambio di parametro $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ bigettivo ha due casi:

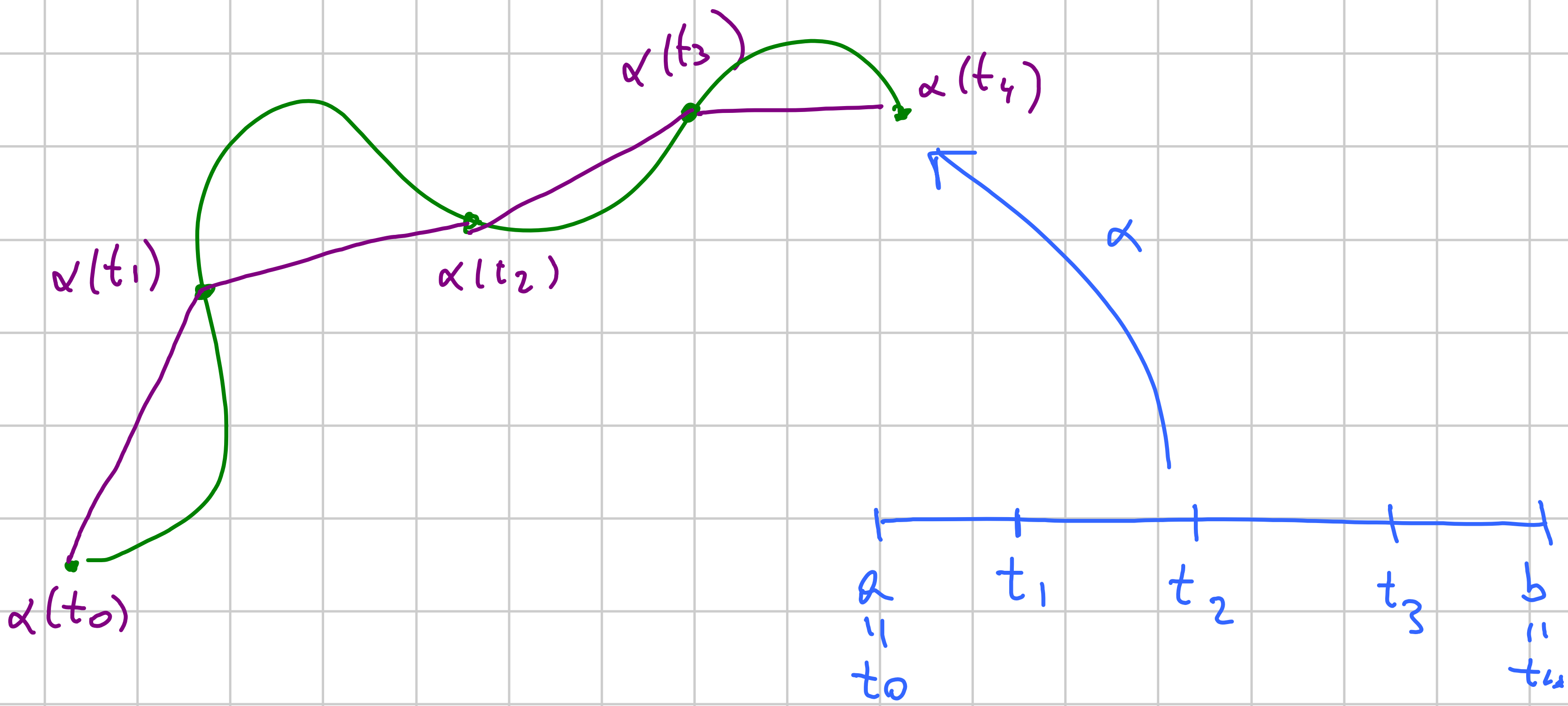

b
a
c
d
crescente
α(b)
β(d)
α(a)
β(c)
b
a
c
d
decrescente
α(b)
β(c)
α(a)
β(d)

Def: chiamo

curva orientata = una curva con un verso specificato

= classe di equivalenza di curve parametrizzate a meno di cambi di parametro crescenti.

Lunghezza di $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$



Approssimo $L(\alpha)$ con lunghezze spezzate

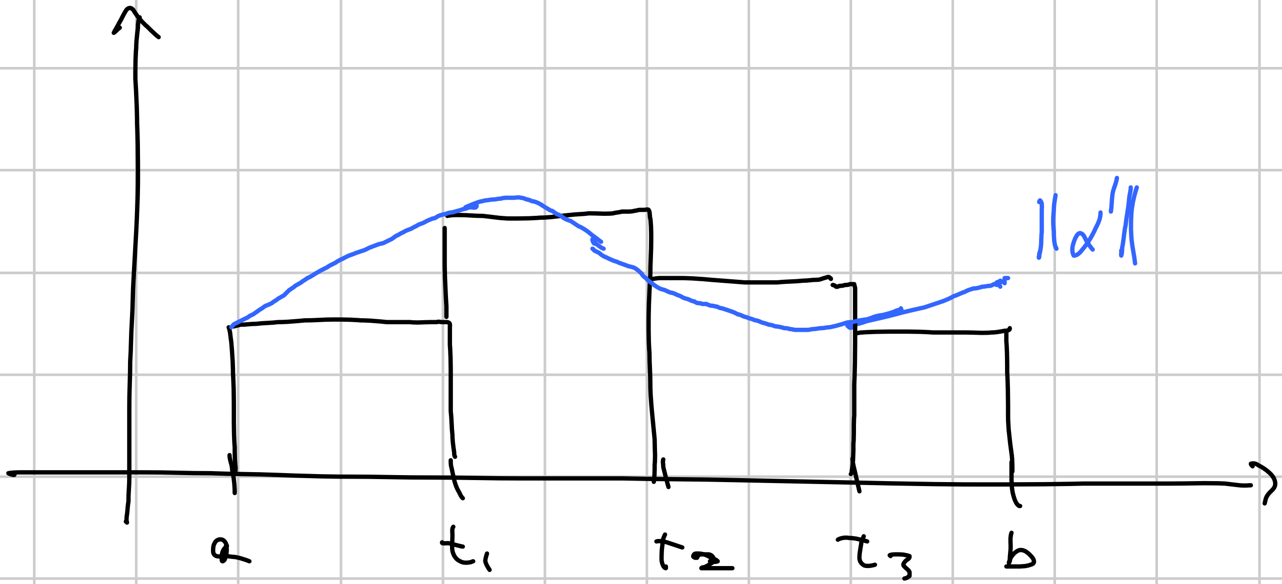
$$\sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$$

dove $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ è una suddivisione. Ottengo $L(\alpha)$ al limite con la suddivisione che diventa fine.

Taylor (I ordine):

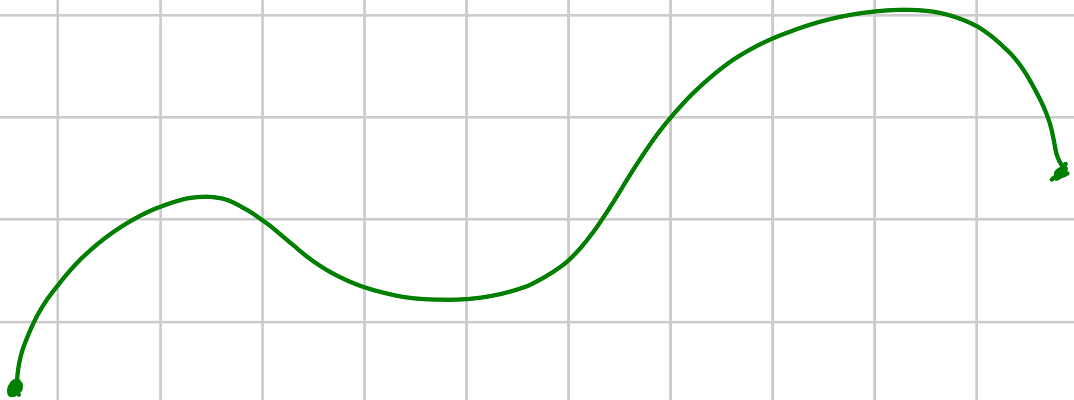
$$\alpha(t_{i+1}) \cong \alpha(t_i) + \alpha'(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

$$\Rightarrow L(\alpha) = \lim \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha'(t_i)\| \cdot (t_{i+1} - t_i)$$



$$\Rightarrow L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt \, .$$

Generalizziamo:



se il fondo è irregolare il "costo" di percorrenza di un tratto infinitesimo dipende dal punto del piano dove avviene.

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y) =$ "costo nel punto (x,y)"

$\Rightarrow$ "costo totale" $= \displaystyle\int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| \, dt$.

Lo chiamo integrale della funzione scalare f lungo la curva α, indicato $\displaystyle\int_\alpha f$

<u>Prop</u>: $\displaystyle\int_\alpha f = \int_\beta f$ se α, β sono ottenute per cambio di parametro.

<u>Dim</u>: $\beta = \alpha \circ \sigma \implies \beta'(s) = \alpha'(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s)$

$$\implies \int_\beta f = \int_c^d f(\beta(s)) \cdot \|\beta'(s)\| ds$$

$$= \int_c^d f(\alpha(\underbrace{\sigma(s)}_{t})) \cdot \|\alpha'(\underbrace{\sigma(s)}_{t})\| \cdot \underbrace{|\sigma'(s)| ds}_{dt}$$

$$= \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt .$$

$\blacksquare$

Def: diciamo che α è in parametro d'arco se $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$.

Prop: ogni curva ammette una riparametrizzazione in parametro d'arco.

Dim: ho $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Pongo $$\eta(t) = \int_0^t \|\beta'(u)\| du$$

= spazio percorso su $[0,t]$.

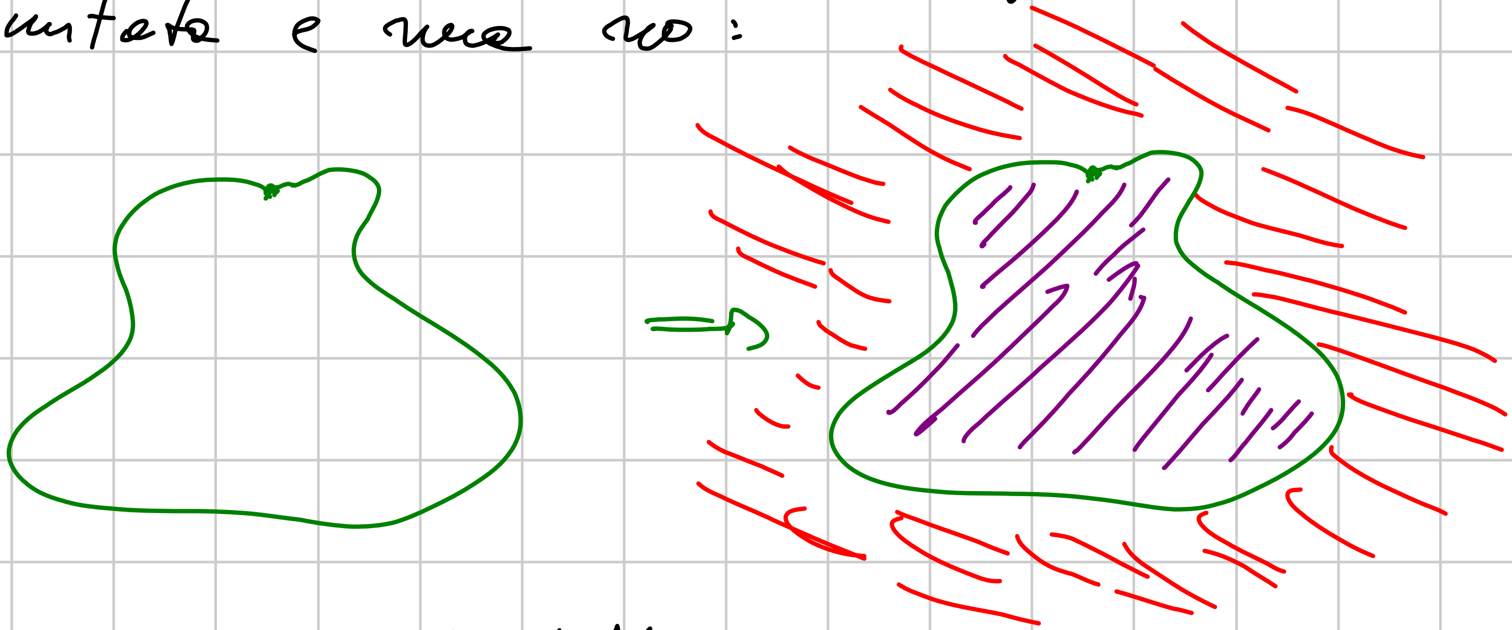
Uso η come tempo. $\eta : [a,b] \longrightarrow [0,L]$
e $\eta'(t) = \|\beta'(t)\| > 0$. Se $\sigma = \eta^{-1}$
allora $\alpha = \beta \circ \sigma$ è in p.d'a. Infatti:

$$\alpha'(s) = \beta'(\sigma(s)) \cdot \underbrace{\sigma'(s)}_{= \frac{1}{\eta'(\sigma(s))} = \frac{1}{\|\beta'(\sigma(s))\|}}$$

$$\Longrightarrow \|\alpha'(s)\| \equiv 1 .$$

$\blacksquare$

Teo (Jordan): se α è una curva semplice e chiusa in $\mathbb{R}^2$ allora α separa $\mathbb{R}^2$ in due regioni, una limitata e una no:

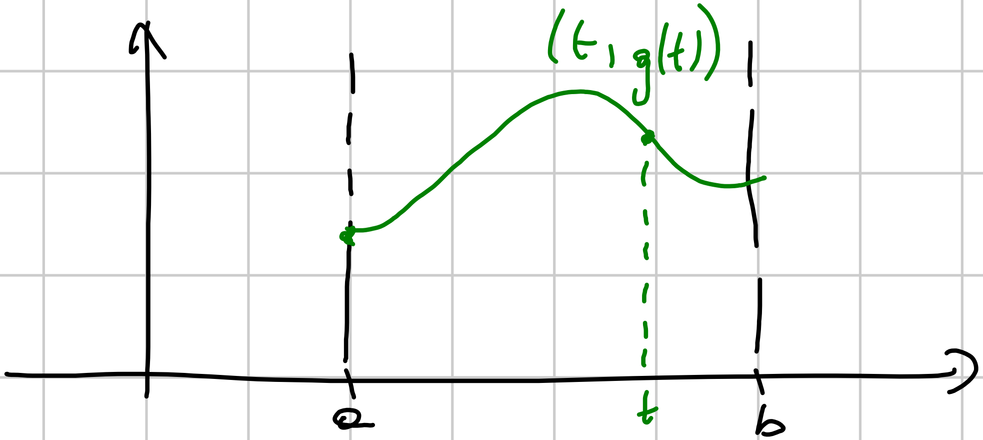


FATTO: è molto difficile.

Costruzione di curve

1. GRAFICI

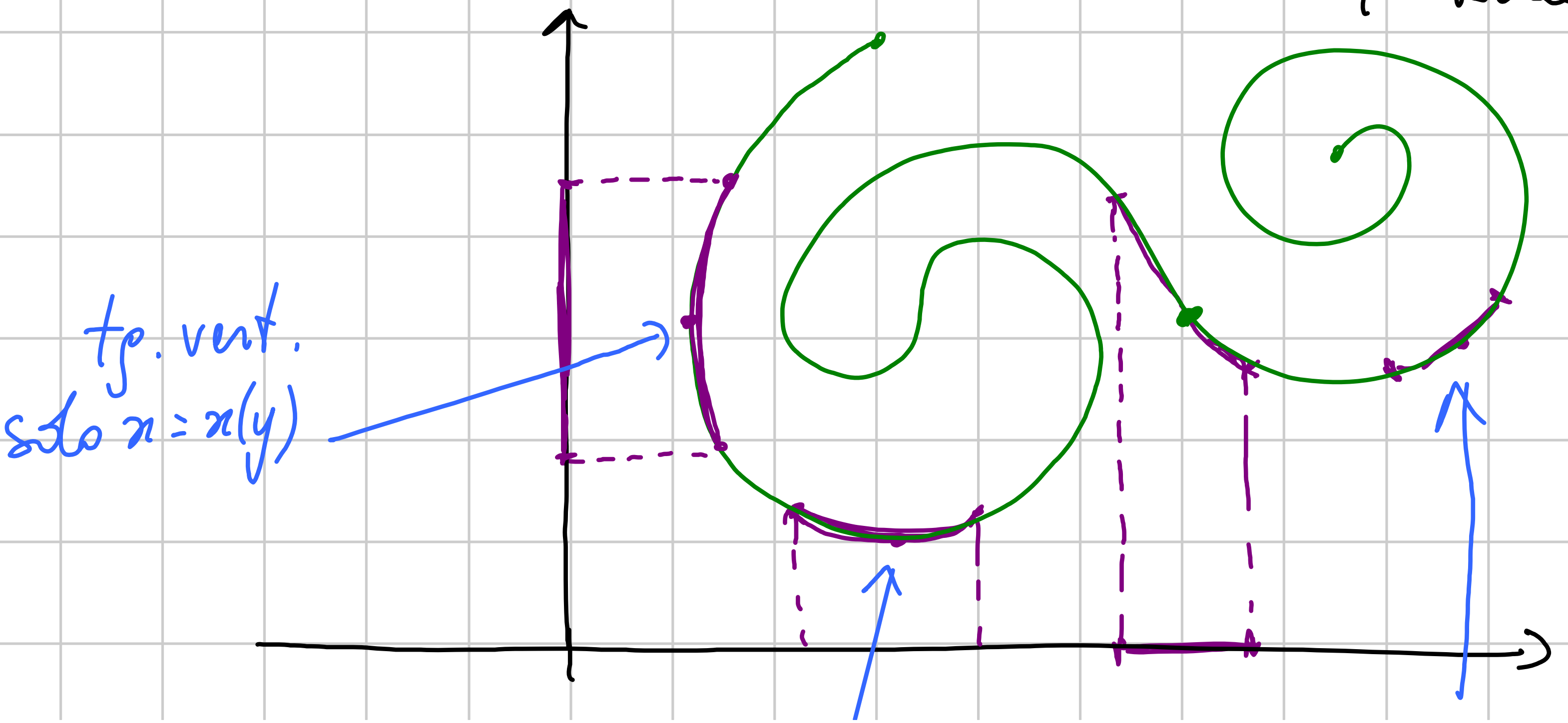
<u>Oss</u>: il grafico di una funzione $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ è una curva:



$$\alpha(t) = (t, g(t))$$

$(\alpha'(t) = (1, g'(t)) \Longrightarrow$ è regolare$)$ _

Fatto: ogni curva è localmente grafico di una delle due variabili in funzione dell'altra:



tg. orizz.:
solo $y=y(x)$

qui localmente
sia $y=y(x)$
sia $x=x(y)$

2. Insiemi di livello

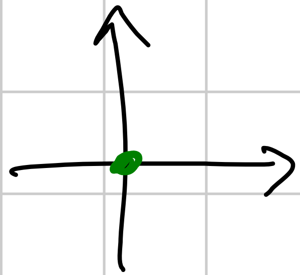
Esempi di curve: $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$

$\{(x,y) : xy=1\}$

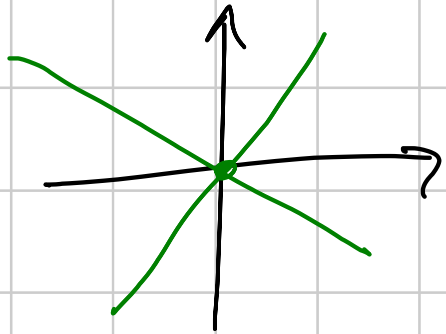
sono definite da equazioni.

Però:

$x^2+y^2=0$



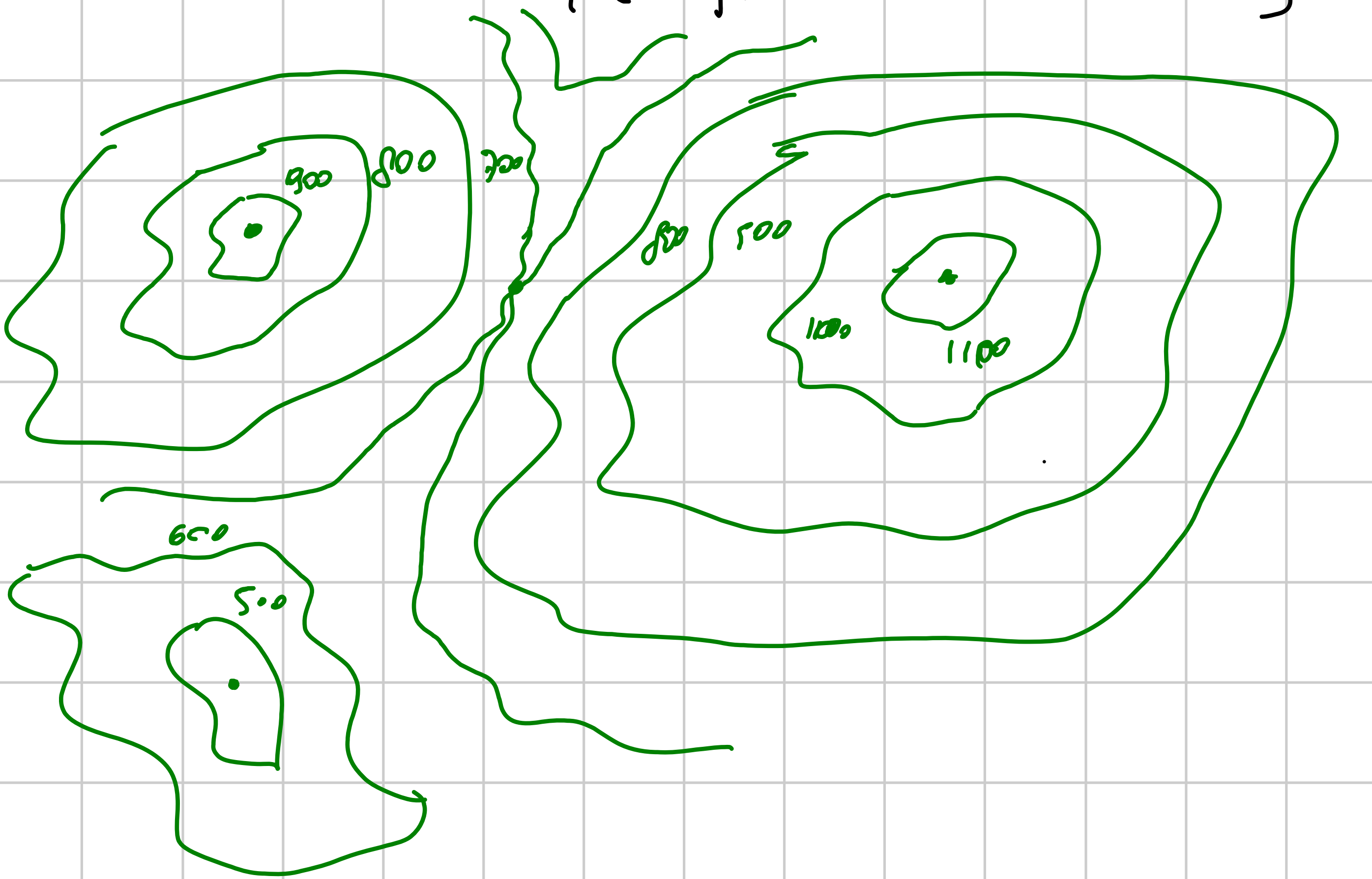
$x^2=y^2$



Q: quali equazioni definiscono curve?

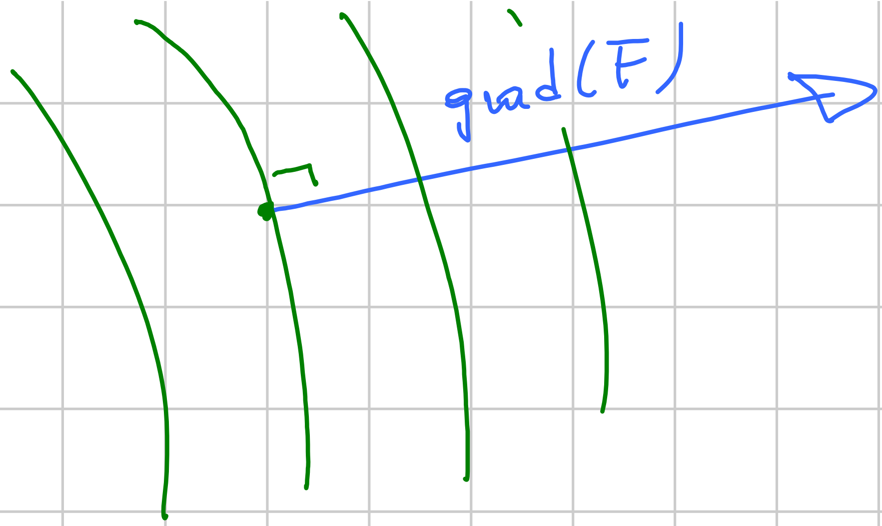
Prendiamo $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Insieme di livello : $\{(x,y) : F(x,y) = k\}$

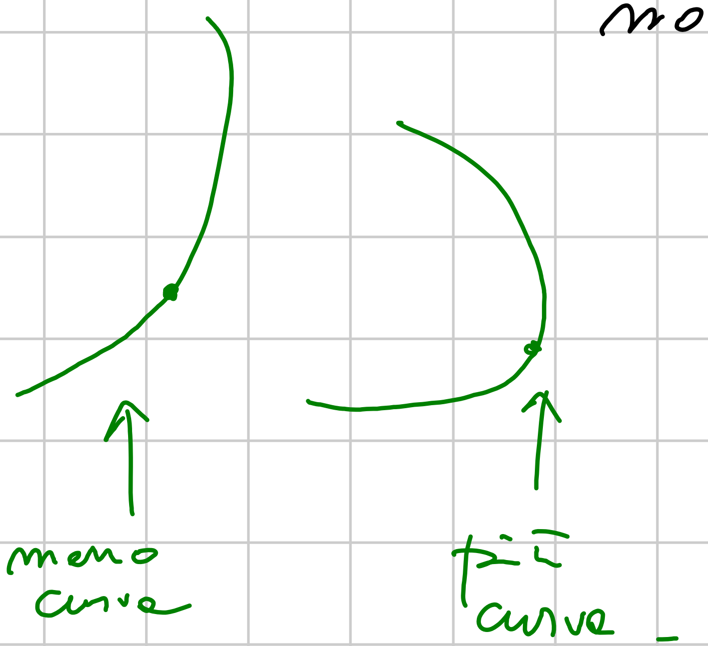


Fatto: nelle cime, nelle depressioni e nei passi ho $\text{grad}(F) = 0$. Invece nei punti in cui $\text{grad}(F) \neq 0$ l'insieme di livello è una curva.

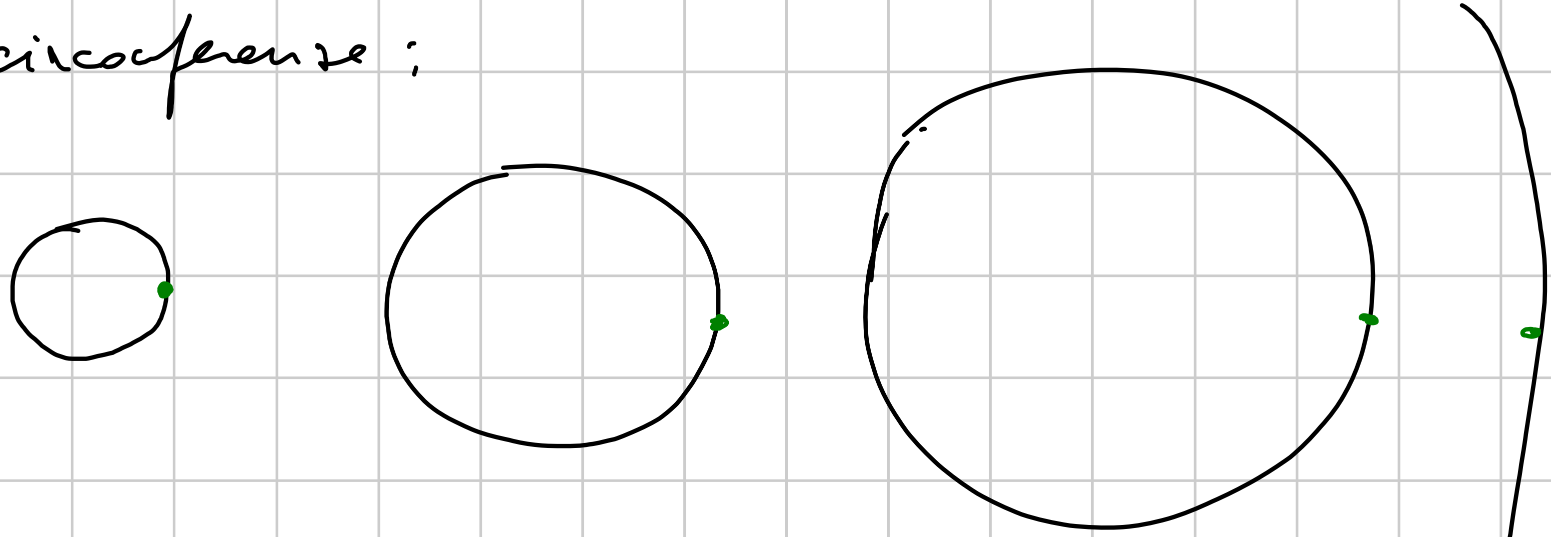
Inoltre: $\text{grad}(F)$ rappresenta la direzione di massima crescita di F; dunque le linee di livello sono ad esso ortogonali.


grad(F)

CURVATURA = "misura di quanto una curva non sia dritta" _



Per circonferenze:



$0 \longleftarrow$ raggio aumenta $\longrightarrow +\infty$

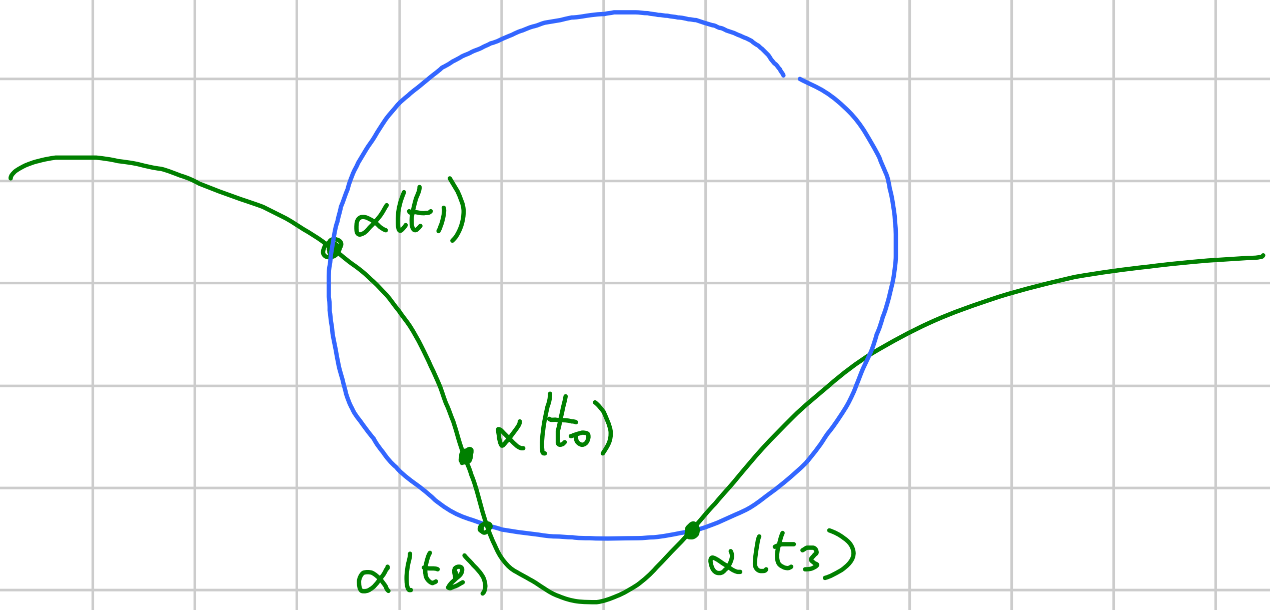
$+\infty \longleftarrow$ curvatura diminuisce $\longrightarrow +0$

<u>Def</u>: curvatura di circonferenza di raggio R

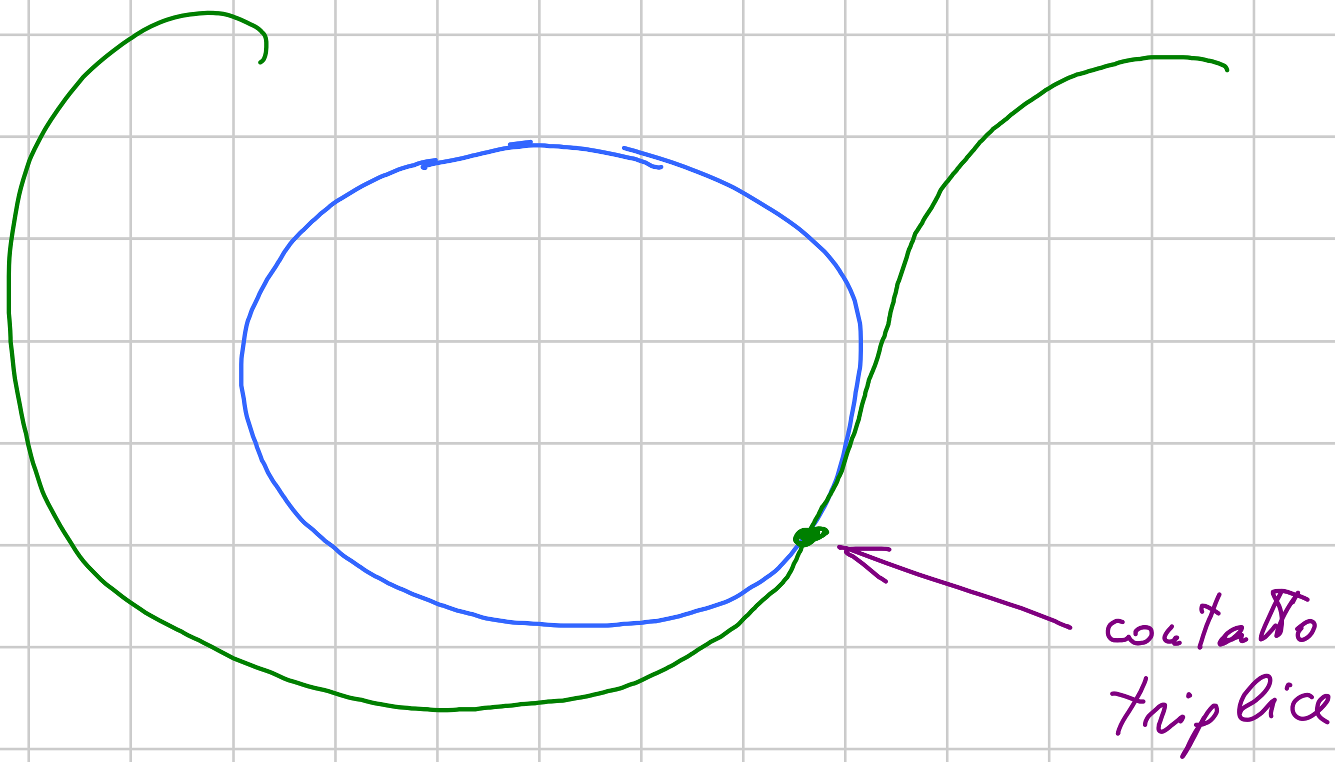
è $K = \frac{1}{R}$.

<u>Per</u> curva qualsiasi:

<u>FATTO</u>: in ogni punto di una curva α esiste un'unica circonferenza avente triplice contatto con α nel punto (tale circonf. può degenerare in una retta):



Prendo l'unica circonferenza che passa per $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$, $\alpha(t_3)$ e poi il limite $t_1, t_2, t_3 \to t_0$

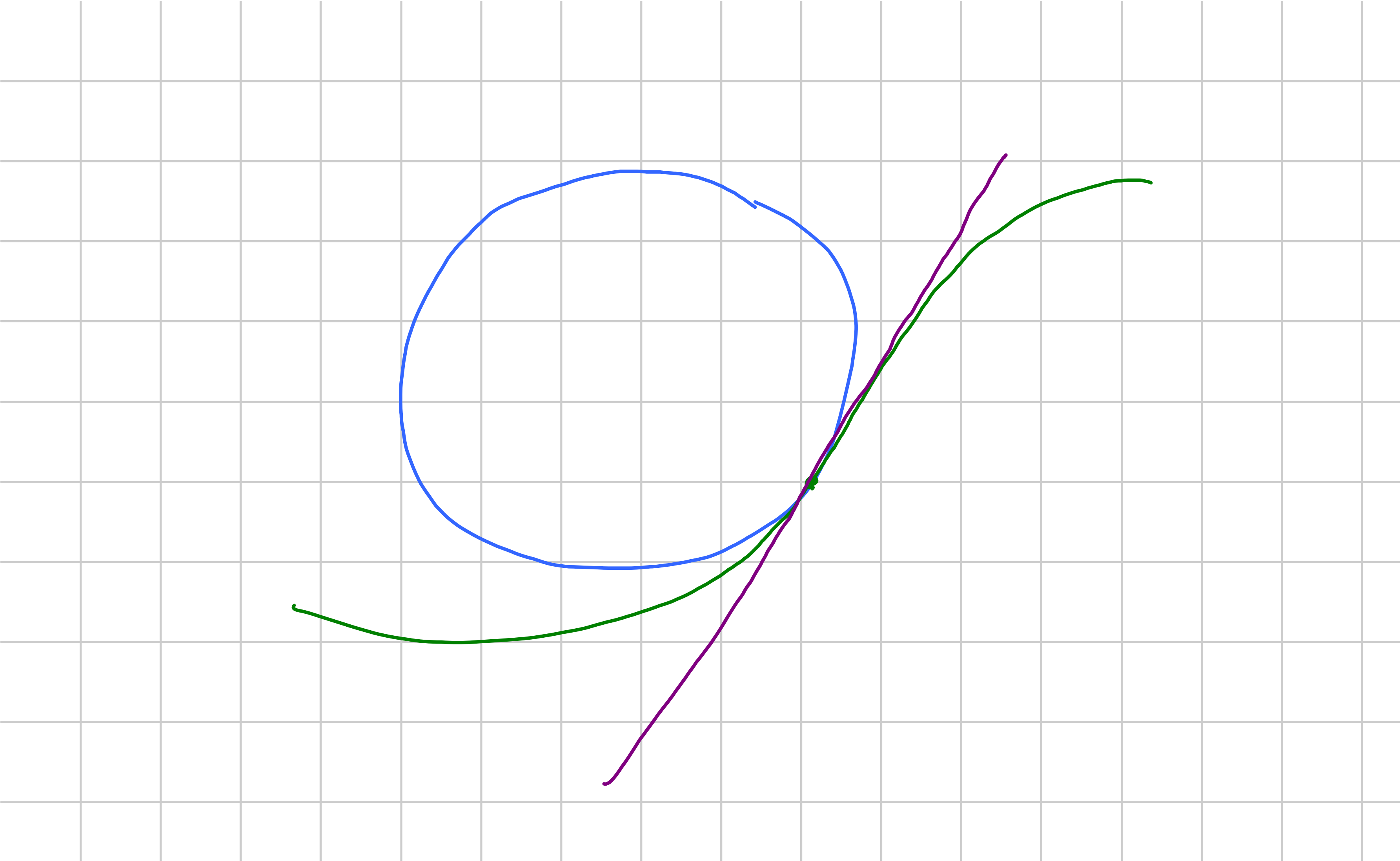


Def: tale circonferenza è detta osculatrice.

<u>Def</u>: chiamo <u>curvatura</u> di α nel punto $\alpha(t_0)$ il reciproco del raggio della circonferenza osculatrice in $\alpha(t_0)$.

Come calcolarla?

<u>Oss</u>: α e la sua circonf. osculatrice hanno la stessa retta tg in $\alpha(t_0)$:



Teo: se α è in parametro d'arco ($\|\alpha'(t)\| \equiv 1$) allora la circonf. osculatrice è quella che passa per $\alpha(t_0)$ e ha centro $\alpha(t_0) + \dfrac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2}$.

Cor: il raggio è $\left\| \dfrac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2} \right\| = \dfrac{1}{\|\alpha''(t_0)\|}$

$\Longrightarrow$ la curvatura è $\|\alpha''(t_0)\|$

Lem: $v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se $\|v(t)\| \equiv 1$

allora $v'(t) \perp v(t) \quad \forall t$.

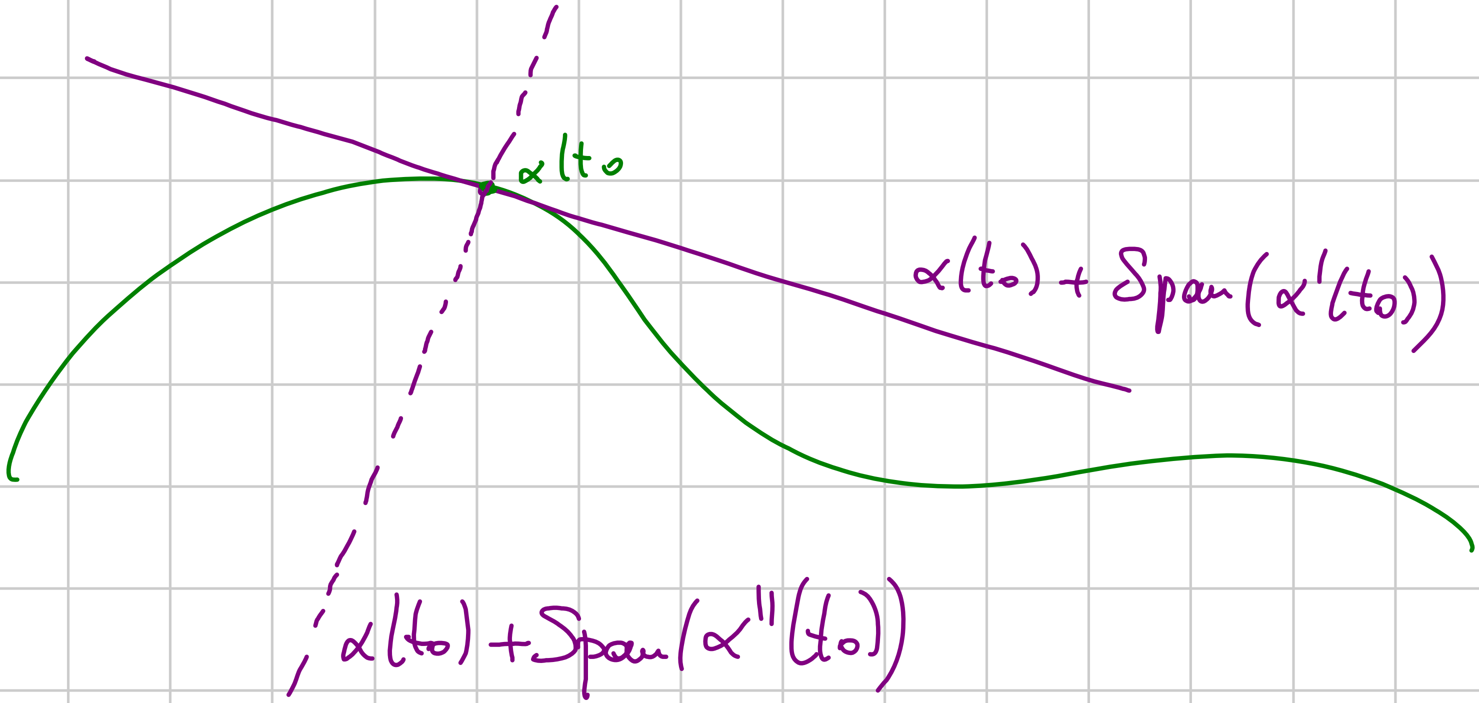
Dim: $\|v(t)\|^2 = v_1(t)^2 + \dots + v_n(t)^2 \equiv 1$

derivando $\underbrace{2 v_1(t) \cdot v_1'(t) + \dots + 2 v_n(t) \cdot v_n'(t)}_{2\langle v(t) | v'(t) \rangle} \equiv 0$.

$\blacksquare$

Dimo (Teo): Poiché $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$ per il lemma ho

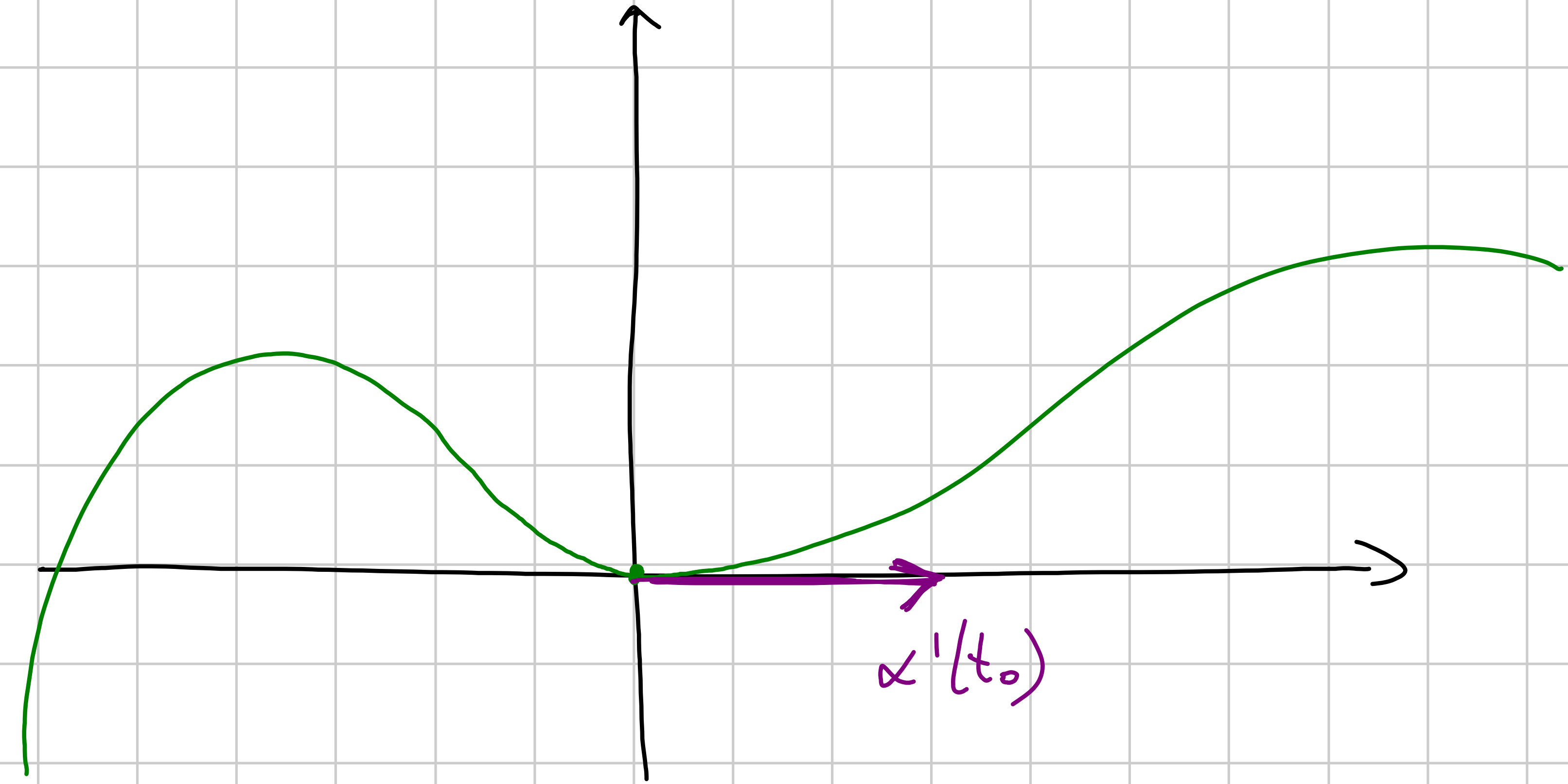
$$\alpha''(t) \perp \alpha'(t)$$



$\Longrightarrow$ so già che il centro è su tale retta

$\Longrightarrow$ è $\alpha(t_0) + c \cdot \alpha''(t_0)$; resta da trovare c.

Per trovarlo opero traslaz + rotaz. finché ho $\alpha(t_0) = 0$, $\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\Longrightarrow \alpha''(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Mi resta da provare che la circonferenza con triplice contatto è quella di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/c \end{pmatrix}$. Idea: prendo r qualsiasi;

calcolo $d(t) = \text{dist}\left(\alpha(t); \text{circonf di centro } \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \text{ per } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= \left| \left\| \alpha(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \right\| - r \right|.$$

Imponendo $d(t_0) = 0$ (gratis)

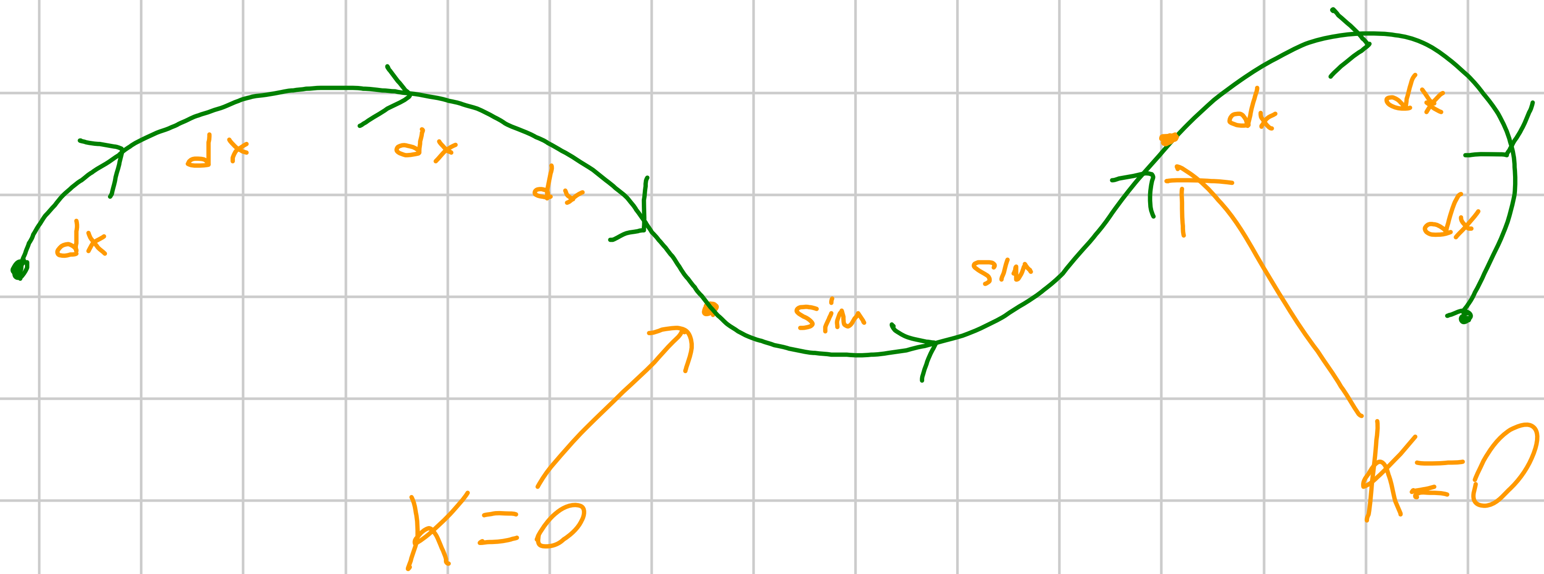
$$d'(t_0) = 0 \qquad (\text{gratis})$$

$$d''(t_0) = 0 \implies r = 1/c . \quad \blacksquare$$

Morale: per α in p.d'a

$$K(\alpha(t)) = \|\alpha''(t)\| .$$

Oss: per una curva orientata possiamo distinguere i punti in cui curva a sinistra o a destra:



Def: chiamiamo curvatura con segno di α orientata la quantità $\pm K$ con
$+K$ se verso sinistra
$-K$ se verso destra.

Q: come si calcola la curvatura (con segno) per una curva non in p. d'a.

Teo: per α qualsiasi

$$K(\alpha(t)) = \frac{\det(\alpha'(t) \quad \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

(Si ottiene riparametrizzando in p.d'e $\beta = \alpha \circ \sigma$ con $\|\beta'\| \equiv 1$
e calcolando $\|\beta''\|$.)