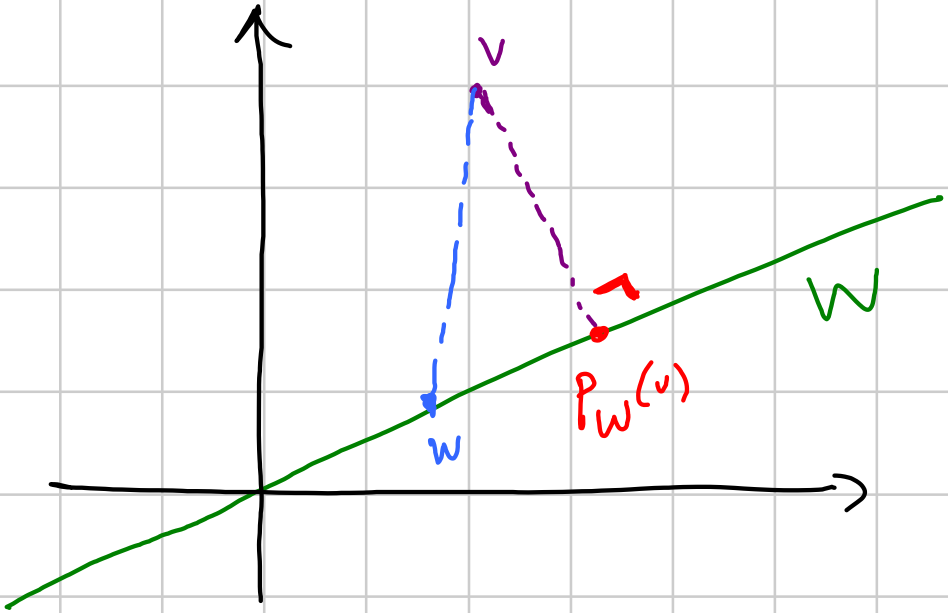
Geom. 12/3/15

Se $\dim V < +\infty$, V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$

W sottosp $\Longrightarrow V = W \oplus W^{\perp}$

$\rightsquigarrow p_W$ proiez. ortogonale.

<u>Prop</u>: $p_W(v)$ è il punto di W più vicino a v.

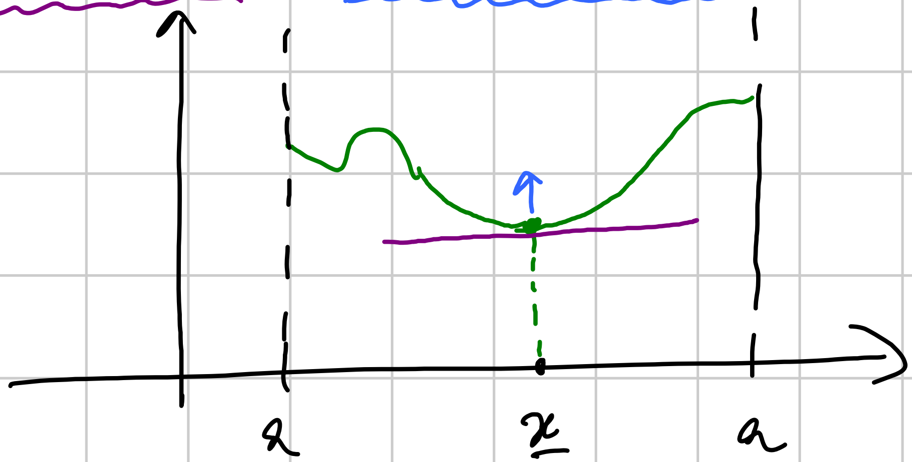


$$d(w,v) \geq d(P_W(v), v) \quad \forall w \in W$$

Richiami di analisi:

- $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$; se $\underline{x}$ è punto di min. (loc.) per f allora

$\rightarrow \ \underline{f'(\underline{x})=0}\ , \ \underline{f''(\underline{x}) \geq 0}$

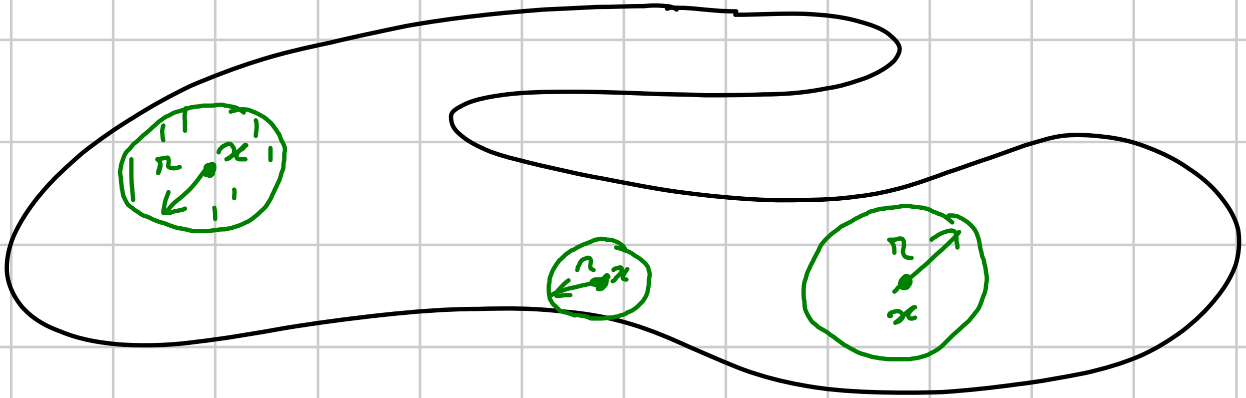


"Quasi viceversa": se $f'(\underline{x})=0$, $f''(\underline{x})>0$ allora $\underline{x}$ è un punto di min. loc.

- In più variabili.

Diciamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ è aperto se

$$\forall x \in \Omega \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{\{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) < r\}}_{\text{disco di centro } x \text{ e raggio } r} \subset \Omega$$



Data $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\underline{x} \in \Omega$ chiamo

derivata parziale i-esima di f in $\underline{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\underline{x}) =$$ derivata di f rispetto alla variabile x_i considerando le altre come parametri fissi, in $\underline{x}$

$$= \frac{d}{dt} f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_i + t, \dots, \underline{x}_k)\Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_i + t, \dots, \underline{x}_k) - f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_k)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x} + t \cdot e_i) - f(\underline{x})}{t}.$$

Es: $f(x,y,z) = \cos\left(x + y^2 \cdot e^{-3zy} + xy^8z^3 \right)$

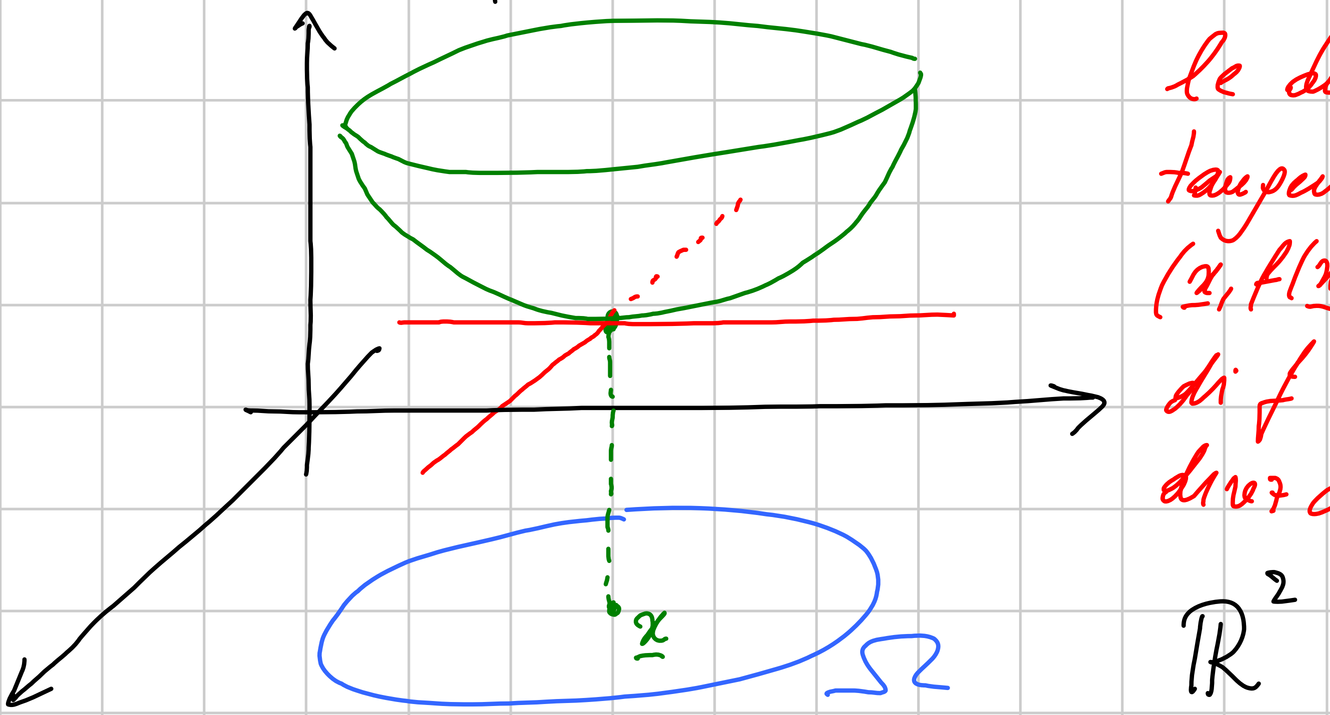
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\sin\left(x + y^2 \cdot e^{-3zy} + xy^8z^3\right) \cdot \left(0 + 2y \cdot e^{-3zy} + y^2 \cdot \left(-3z \cdot e^{-3zy}\right) + 8xy^7z^3\right).$$

Fatto: se $\underline{x}$ è un pto di min. rel. per f allora $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\underline{x}) = 0$ per $i = 1 \dots k$.

Infatti per ogni i si ha che $t \mapsto f(\underline{x} + te_i)$

ha un minimo loc. in $t=0$. Cioè:

$f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$



le due rette tangenti in $(\underline{x}, f(\underline{x}))$ al grafico di f nelle due direz. coordinate sono orizz.

ATTENZIONE: l'analogo delle condizioni sulle derivate seconde (necessaria: $f''(\underline{x}) \geq 0$; sufficiente: $f''(\underline{x}) > 0$) richiede molto più teoria.

Prop: $p_W(v)$ è il punto di W più vicino a v.

Dim: Se $w_1, \dots, w_k$ è base ortogonale di W sappiamo che

$$p_W(v) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j .$$

Generico punto di W: $x_1 w_1 + \cdots + x_k w_k$

con $x \in \mathbb{R}^k$.

Per concludere devo provare che

$$x \longmapsto d(x_1 w_1 + \cdots + x_k w_k, v) \qquad \circledast$$

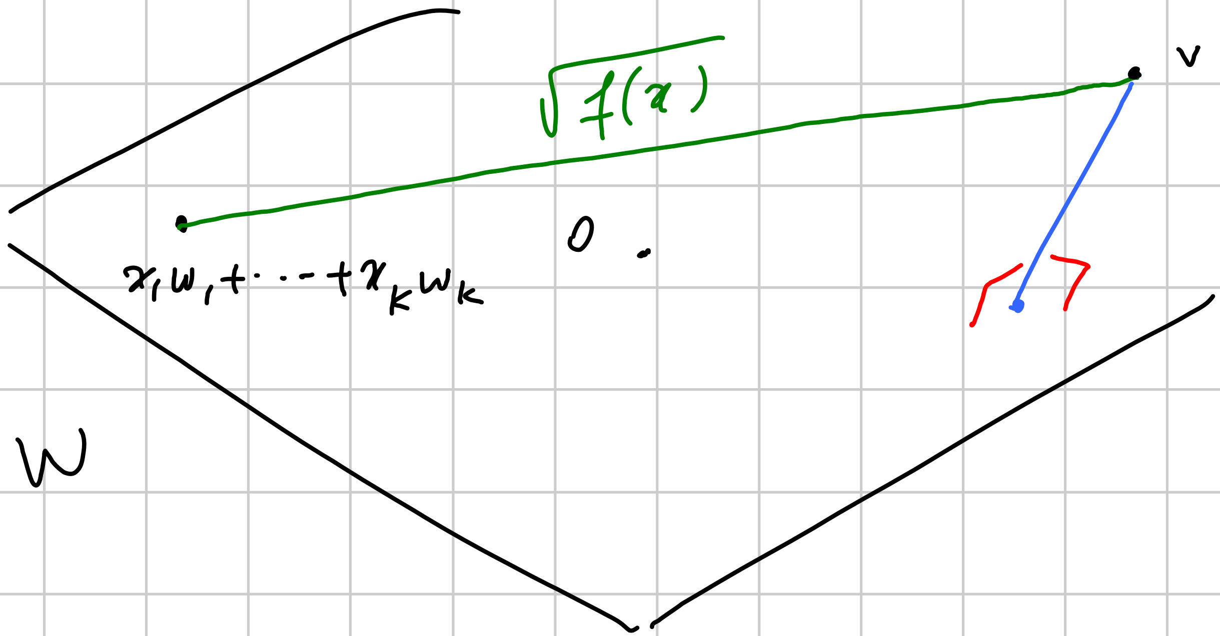
ha minimo per $x_i = \langle v | w_i \rangle$ $i = 1 \ldots k$.

Provare che $\circledast$ ha minimo, equivale a farlo per il suo quadrato, ovvero per

$$f(x) = \left\| v - \sum_{j=1}^{k} x_j w_j \right\|^2 \qquad \text{ma}$$

$$f(x) = \|v\|^2 - 2\sum_{j=1}^{k} x_j \langle v | w_j \rangle + \underbrace{\left(2\sum_{\substack{j,l=1 \\ j\neq l}}^{k} x_j x_l \underbrace{\langle w_j | w_l \rangle}_{\text{tutti nulli}} \right)}_{=0}$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \cdot \|w_j\|^2 .$$



Chiaro che: $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ se c'è un solo punto in cui le derivate

parziali si annullano, esso è di minimo assoluto.
Ora:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \iff 0 - 2\langle v | w_i \rangle + 2x_i \cdot \|w_i\|^2 = 0$$

$$\iff x_i = \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$$

dunque nel punto voluto.

$\blacksquare$

Ortogonalità nello spazio $\mathbb{R}^3$:

OSS: in $\mathbb{R}^3$ la ortogonalità dà una corrispondenza tra piani e rette per 0

Eq. cartesiana di un piano π:

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : ax + by + cz = 0 \right\}$$ cioè

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$ cioè

$$\pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\perp}$$ cioè

$$\pi = \left(\operatorname{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)^{\perp}$$ cioè

$$\pi^\perp = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Scoperto: equaz. cart. piano π $\Longleftrightarrow$ equaz. param. per retta $\pi^\perp$

Equaz. cart. retta ℓ:

$$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{matrix} \right\}$$ cioè

$$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

cioè

$$\ell = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\} \right)^{\perp}$$ cioè

$$\ell = \left(\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \right)^{\perp}$$ cioè

$$\ell^{\perp} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right)$$

Scoperto:

equaz. cart. per retta ℓ $\Longleftrightarrow$ equaz. param. per piano $\ell^{\perp}$

Ricordo: i due passaggi

eq. param. per piano π $\xrightarrow[(1)]{}$ eq. cart. per π

eq. cart. per retta ℓ $\xrightarrow[(2)]{}$ eq. param. per ℓ

si facevano tutti e due con la regola dei det 2x2 _ Infatti :

$$\begin{array}{ccc} \text{eq. param. per piano } \pi & \xrightarrow[(1)]{} & \text{eq. cart. per } \pi \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \text{eq. cart. per retta } \pi^{\perp} & \xrightarrow[(2)]{} & \text{eq. param. per } \pi^{\perp} \end{array}$$

Interpretazione geom. delle regole dei det 2x2:

<u>Def</u>: chiamo prodotto vettoriale di

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{come} \quad v_1 \underset{\times}{\wedge} v_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -x_1 z_2 + x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

<u>Visto</u>: Se v_1 e v_2 generano un piano π allora le componenti di $v_1 \wedge v_2$ sono i coeff.

di una equaz. cart. di π, cioè $v_1 \wedge v_2$ è un generatore della retta $\pi^\perp$.

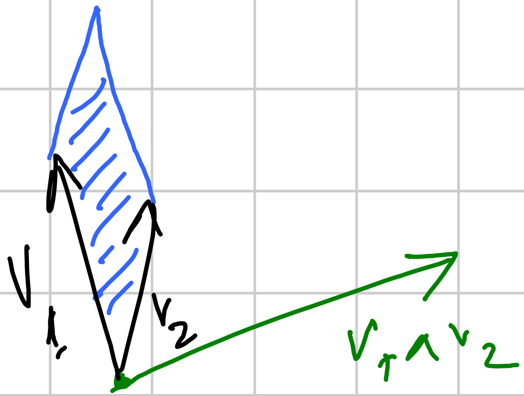
In particolare: $v_1 \wedge v_2$ è ortogonale a v_1 e v_2.

In realtà, $v_1 \wedge v_2$ è caratterizzato da:

- è ortogonale a v_1 e v_2
- ha norma uguale all'area del parallelogramma di lati v_1 e v_2 (dunque è nullo se v_1 e v_2 sono lin. dip.)

- il verso di $v_1 \wedge v_2$ è tale che $v_1, v_2, v_1 \wedge v_2$ soddisfano la regola mano dx

wedge



ovvero $\det(v_1, v_2, v_1 \wedge v_2) > 0$

<u>Esercizi</u> 6

e) $f(x,y) = 4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$ <u>Bil</u>, <u>Sim</u>

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad 4 > 0,\ 4 \cdot 5 - (-3)^2 > 0 \longrightarrow \text{def. pos.}$$

Infatti: $f(x,x) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$
$= x_1^2 + 3(x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2$

è >0 per $x \neq 0$.

(f) $\mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_3y_3$

<u>Bil</u>: Sì ; <u>Sim</u>: No

(g) $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + 2x_3y_3$

<u>Bil</u>: sì <u>Sim</u>: Sì

Viene da: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ det < 0 $\Rightarrow$ dice che esiste un vettore di $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ su cui è neg: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

No.

(h) $x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$

<u>Bil Sì</u>

<u>Sim Sì</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ho $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ che è def. pos
che agisce su $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$
e (2) che è def pos
che agisce su $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$
$\Longrightarrow$ è def. pos.

Infatti: $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$

sempre ≥ 0, nulla solo per $x = 0$ —

(8)(a) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$f(A,B) = \sum_{i,j=1}^{2} (1+(-2))^{i+j} (A\cdot B)_{ij}$$

Bilineare Sì

Simm: $\quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto 5$$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto 17$ **No**

(b) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$

$f(p(t), q(t)) = p(1) \cdot q'(-1) + q(1) \cdot p'(-1)$

Bil? Sì   Simm: Sì

Def. pos? $f(p(t), p(t)) = 2\, p(1) \cdot p'(-1)$. **No**

(10) Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sia B data $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$. Provare che B dà un prod. scal. $\Longleftrightarrow$ A lo fa.

B simm $\Longleftrightarrow$ $b_{ij} = b_{ji}$ $\forall i,j$

$$\Longleftrightarrow \cancel{(-1)^{i+j}}\, a_{ij} = \cancel{(-1)^{j+i}}\, a_{ji} \quad \forall i,j$$

$\Longleftrightarrow$ A simm.

$$\left(A \rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}. \right)$$

$$B \text{ def. pos.} \iff \langle x | x \rangle_B > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\iff {}^t x \cdot B \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\iff (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\iff \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \cdot x_i x_j > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} x_i x_j > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left((-1)^{i} x_i\right) \cdot \left((-1)^{j} x_j\right) > 0$$

$$\forall x \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot (Tx)_i \cdot (Tx)_j > 0 \quad \forall x \neq 0$$

dove $\quad T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \ldots \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow \langle Tx | Tx \rangle_A > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Longleftrightarrow \langle y | y \rangle_A > 0 \quad \forall y \neq 0$ (T bijettiva)

$\Longleftrightarrow$ A def. pos.

(11) Siano $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. $a_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle$
$A = (a_{ij})$. Quando accade che A definisca un prod. scal?

$$a_{ji} = \langle v_j | v_i \rangle = \langle v_i | v_j \rangle = a_{ij} \Longrightarrow A \text{ simm.}$$

Def. pos.? $\quad a_{ij} = {}^t v_i \cdot v_j$

$$\Longrightarrow A = {}^t(v_1, \dots, v_n) \cdot (v_1, \dots, v_n).$$

Sia $M = (v_1, \dots, v_n)$. Consideriamo:

$$\langle x | x \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot x = {}^t x \cdot {}^t M \cdot M \cdot x$$
$$= {}^t(M \cdot x) \cdot (M \cdot x) = \| M \cdot x \|^2.$$

E' sempre positivo per $x \neq 0$ se M è invertibile, cioè se $(v_1, \dots, v_n)$ sono una base; altrimenti no.

(13) $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ $\qquad \langle p(t) | q(t) \rangle = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2)$.

Bil, simm; $\langle p(t) | p(t) \rangle = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2$

è ≥ 0; nullo solo se $p(0) = p(1) = p(2) = 0$ cioè se $p(t) = 0$.

Trovare $p(t)$ ortog a $1+t$ e $1+t^2$:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$