

Geometrie 10/4/15

Coniche (non degeneri) in $\mathbb{R}^2$ euclideo

Modelli geometrici + equazioni canoniche e
metodo di isometrie

luoghi descritti da
una proprietà
geometrica

come ieri: accetto anche
traslazioni

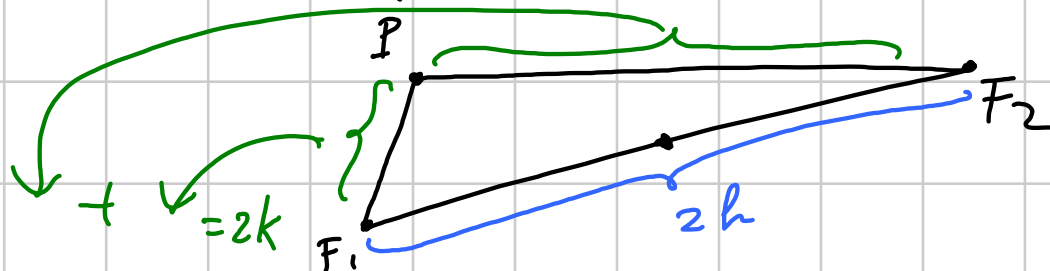
Circonfenza: dato $C \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, C) = r\}$$

Epura: traslo C in O : $x^2 + y^2 = r^2$

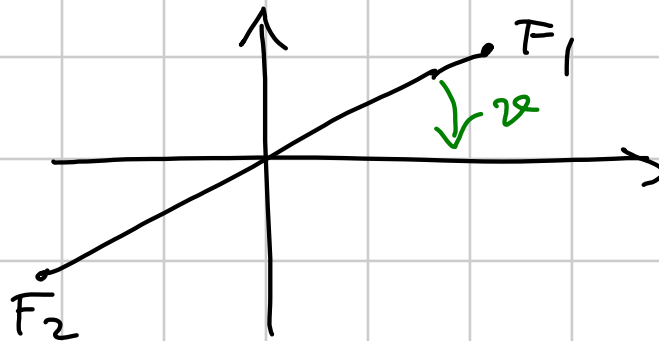
Ellisse: dati $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, $\text{dist}(F_1, F_2) = 2h$,
e dato $k > h$

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2k\}$$



$$(\Rightarrow 2k > 2h)$$

Ejerc: trasladar en O el centro del apuro
 $F_1 F_2$:



Que punto intersección O en modo de

$$F_2 = (-h, 0) \quad F_1 = (h, 0)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \text{se} \quad \sqrt{(x+h)^2 + y^2} + \sqrt{(x-h)^2 + y^2} = 2k$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + y^2} = 2k - \sqrt{(x+h)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} - \cancel{2xh} + \cancel{h^2} + \cancel{y^2} = \cancel{4k^2} - \cancel{4k} \sqrt{(x+h)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + \cancel{2xh} + \cancel{h^2} + \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow k \sqrt{(x+h)^2 + y^2} = k^2 + xh$$

$$\Rightarrow k^2 x^2 + \cancel{2k^2 xh} + k^2 h^2 + k^2 y^2 = k^4 + \cancel{2k^2 xh} + x^2 h^2$$

$$\Rightarrow (k^2 - h^2)x^2 + k^2 y^2 = k^2(k^2 - h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 - h^2} = 1 \quad (a = k, b = \sqrt{k^2 - h^2})$$

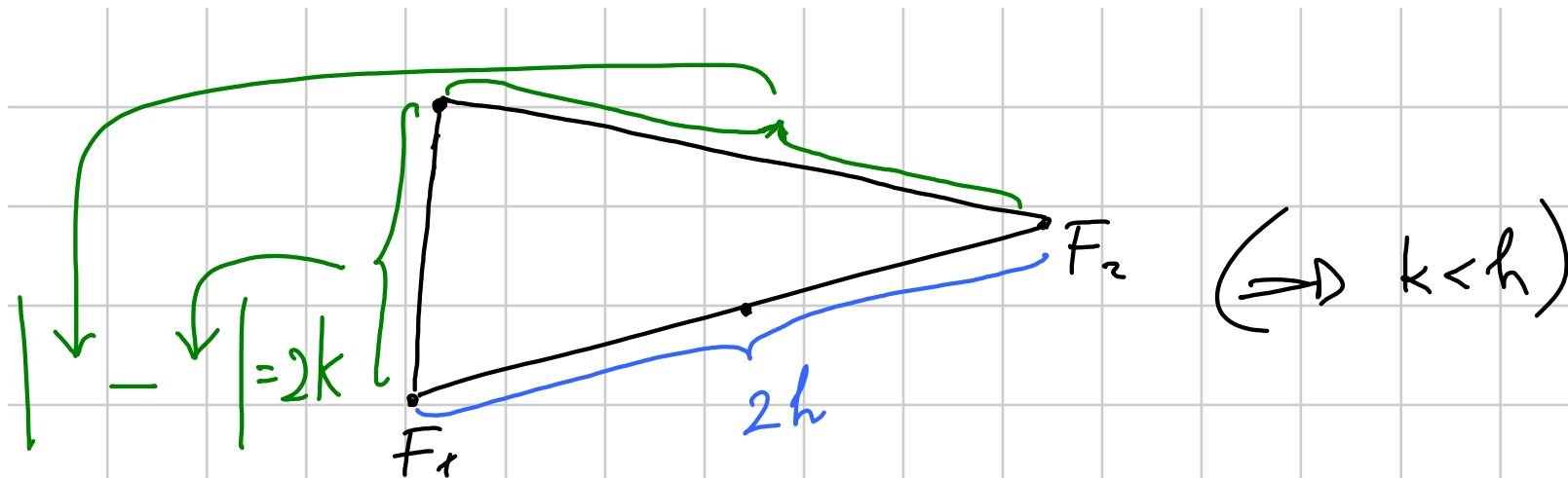
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equazione canonica
dell'ellisse di semiassi
 $a > b > 0$

Fatto: l'equazione finale equivale a quella iniziale

Ipotesi: dati $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, $d(F_1, F_2) = 2h$
e dato $k < h$ ($k > 0$)

$$\mathcal{I} = \{ P \in \mathbb{R}^2 : |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2k \}$$



Equation: $F_1 = (h, 0)$ $F_2 = (-h, 0)$

$$\left| \sqrt{(x+h)^2 + y^2} - \sqrt{(x-h)^2 + y^2} \right| = 2k$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + y^2} = \pm 2k + \sqrt{(x+h)^2 + y^2}$$

(con gli stessi passaggi di prima)

$$\Rightarrow \frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{h^2 - k^2} = 1$$

$$a = k$$
$$b = \sqrt{h^2 - k^2}$$

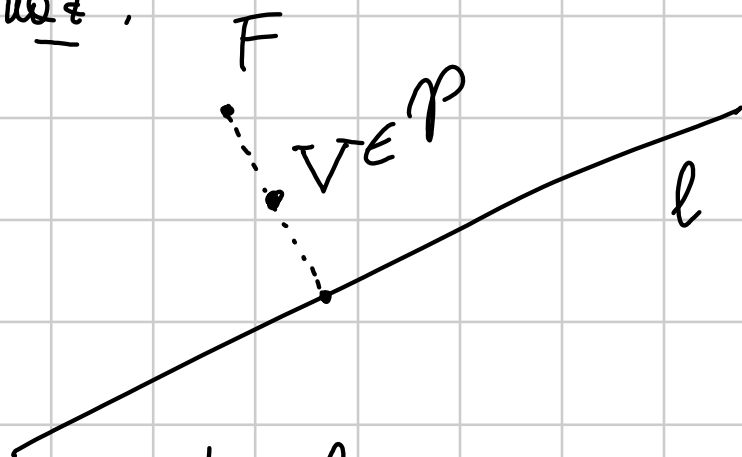
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(a > b > 0)$$

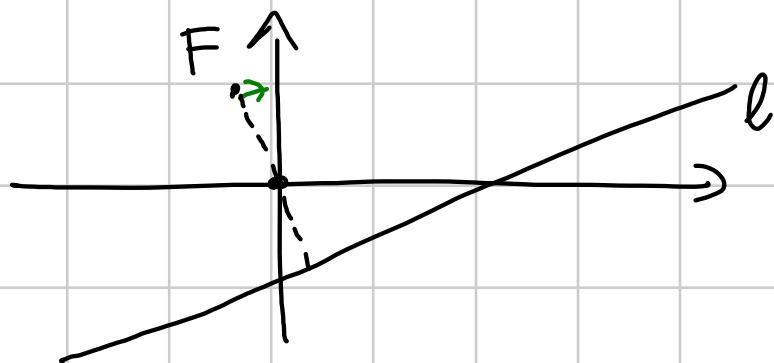
Parabole: dati $F \in \mathbb{R}^2$, $l \subset \mathbb{R}^2$ retta, $F \notin l$

$$\mathcal{P} = \{ P : d(P, F) = d(P, l) \}$$

Equation:



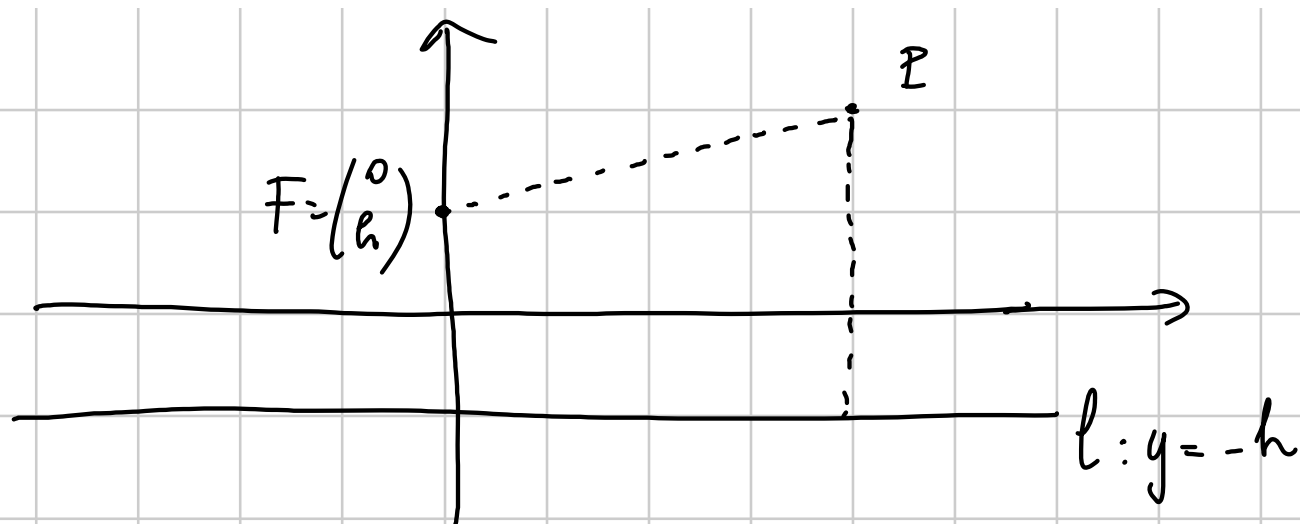
trovare V in O



trovare in modo che

$$\overline{F} = (0, h)$$

$$l: y = -h \quad (h > 0)$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-h)^2} = |y+h|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \cancel{y^2} - 2yh + \cancel{h^2} = \cancel{y^2} + 2yh + \cancel{h^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4h} x^2$$

$$y = ax^2 \quad (a > 0)$$

————— 0 —————

Or consideriamo le coniche a meno di
trasformazioni affini: (dove le def. in $\mathbb{R}^n$):

$$x \mapsto M \cdot x + v \quad \begin{array}{l} M \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ \det(M) \neq 0, v \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

cioè: composizione di una trasformazione lineare
invertibile e di una traslazione —

Modelli affini delle coniche

(le coniche di sopra viste a meno di trasformazioni affini)

Ellisse/circonf :

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ; \begin{cases} X = ax \\ Y = by \end{cases} \leadsto X^2 + Y^2 = 1 \right)$$
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Ipersbole : $x^2 - y^2 = 1$

Parabola : $y = x^2$

$(y = ax^2 ; \begin{cases} X = \sqrt{a} \cdot x \\ Y = y \end{cases} \leadsto Y = X^2)$

Oss : tutte queste equazioni sono di II grado
in x e y (non omogenee) -

Q: Classificare a meno di trasformazioni
affini i luoghi in $\mathbb{R}^n$ definiti da
equazioni di Π grado —

Abbiamo un luogo $L = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) = 0\}$ —
Vogliamo cercare delle "equazioni modello"

$p_1, \dots, p_n$ t.c.

- per ogni luogo $L = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) = 0\}$

Esiste una trasformazione affine $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
t.c. $T(L) = \{x \in \mathbb{R}^m : p_j(x) = 0\}$
per qualche j .

- criteri su $p(x)$ per stabilire quale modello $p_j(x)$ si trova.

↳ Equazione di II grado in $\mathbb{R}^m$:

$\underline{\Sigma}_S$ in $\mathbb{R}^3$

$$7x^2 + 5xy + 2xz - 4yz + 2z^2 + 19x - \sqrt{11} \cdot y + 4z + 12 = 0$$

qu generale:

$$\underbrace{\sum_{1 \leq i \leq j \leq m} \alpha_{ij} x_i x_j}_{\text{parte quadratica}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \beta_i x_i}_{\text{parte lin}} + \underbrace{\gamma}_{\text{termine noto}} = 0$$

Oss: possiamo scrivere questa equazione
nelle seguente forma:

$${}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Q & l \\ l & c \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

con Q (e dunque A) simmetriche: con

$$g_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ii} & j=i \\ \frac{1}{2} \alpha_{ij} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$l_i = \frac{1}{2} \beta_i$$

$$r = c$$

$$\underline{E}_S: \quad 7x^2 + 5xy + 2xz - 4yz + 9z^2 + 19x - \sqrt{\pi} \cdot y + 4z + 12 = 0$$

$$t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 5/2 & 1 & 19/2 \\ 5/2 & 0 & -2 & -\sqrt{\pi}/2 \\ 1 & -2 & 9 & 2 \\ \hline 19/2 & -\sqrt{\pi}/2 & 2 & 12 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

so no
ypuali