

Geometrie 9/4/15

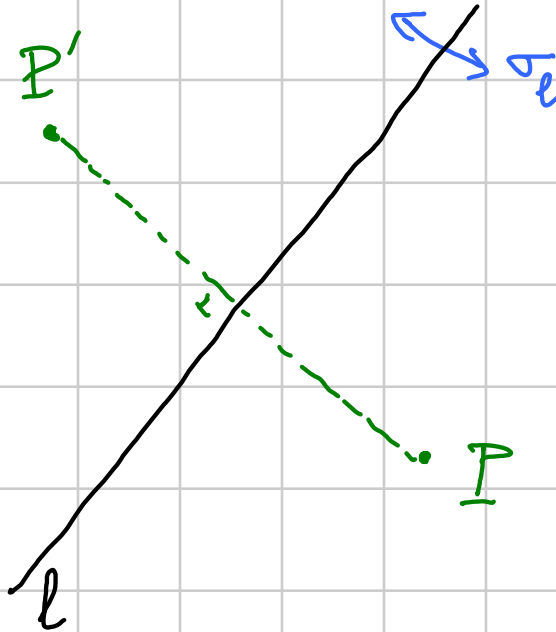
Isometrie del piano euclideo -

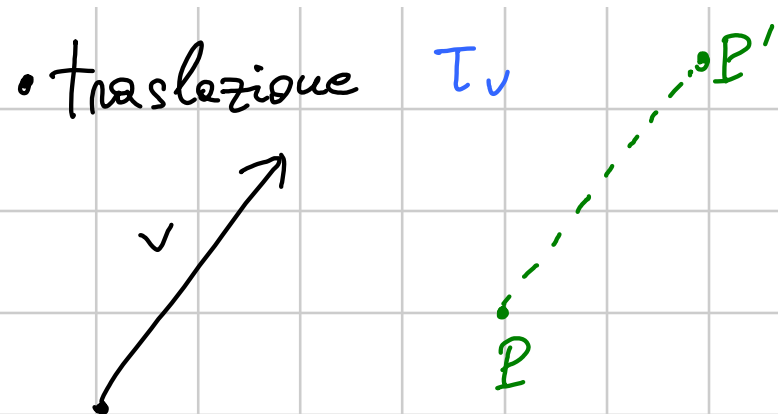
Piano euclideo: $\mathbb{R}^2$ con distanza "solite"
(indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$) -

Trasformazioni che preservano le distanze
(= isometrie = movimenti rigidi)

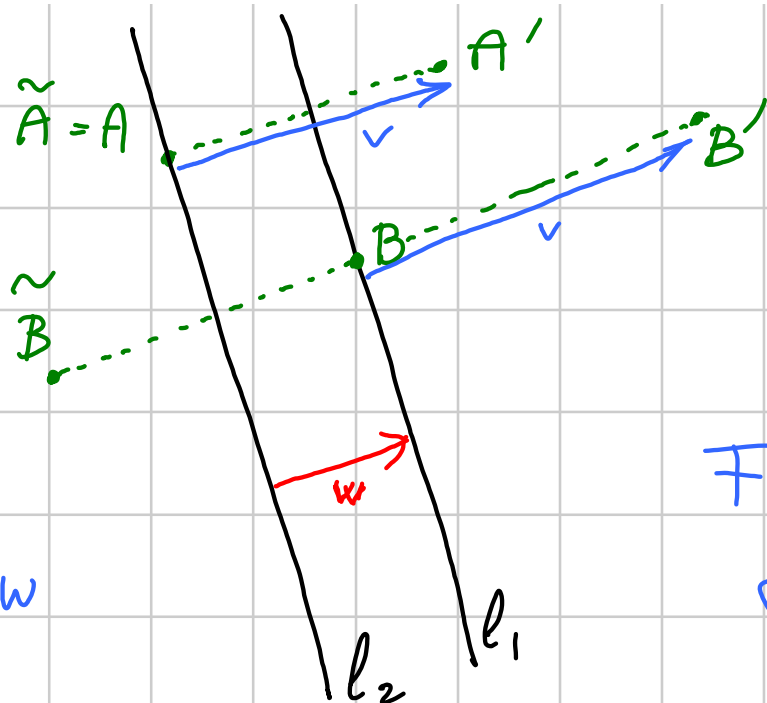
NON chiedo nient'altro a priori (NON chiedo lineari) -

Esempi: • riflessione





Oss: ogni traslazione è composizione di due riflessioni
(rispetto a rette parallele tra loro):



$$v = 2w$$

$$\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2}$$

$$P \mapsto \tilde{P} = \sigma_{l_2}(P) \mapsto P'$$

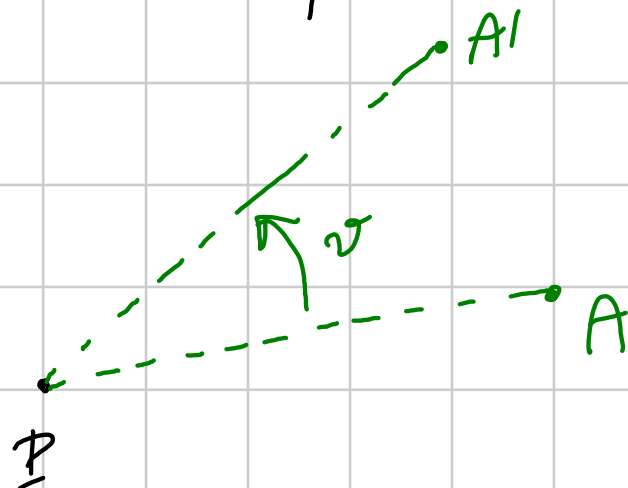
" $(\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2})(P)$

For σ_0 :

$$\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2} = \tau_{(2w)}$$

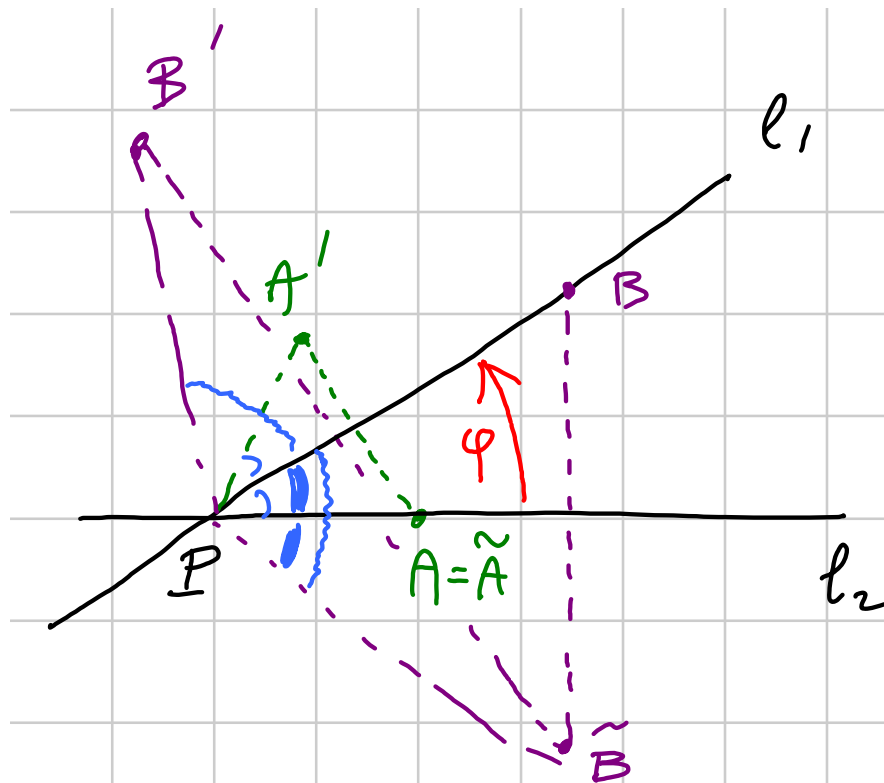
Ona: data τ_v qualsiasi, basta trovare l_1, l_2 t.c. $v = 2w$.

• rotazioni : dato P punto e ϑ angolo



$R_{P,\vartheta}$

Uss : Ogni rotazione è composizione di due riflessioni (rispetto a rette incidenti) :



$$\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2}$$

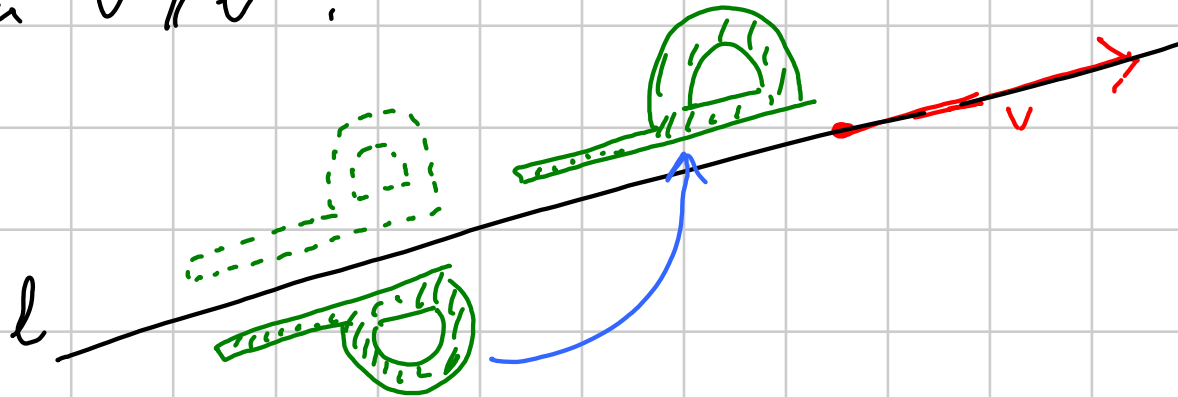
Fatto : $\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2} = \rho_{P, \nu}$

$$\nu = 2\varphi$$

Obs : date $\rho_{P, \nu}$ bisopuo trovare l_1, l_2 incidenti in P che formano angolo $\nu/2$ -

- identità (= trasl. di vettore nullo
= rotaz. di angolo nullo)

- glissoniflexione : composizione di una
riflessione σ_l con una traslazione T_v
con $v \parallel l$:



Oss: 1) non importa l'ordine di composizione
2) ogni glissoriflessione è prodotto di tre riflessioni

Teo: Ogni isometria del piano euclideo è
composizione di riflessioni, dunque è
di uno dei tipi elencati:
riflessione, traslazione, rotazione, id., glissorifl.

Dimo (I parte): data g isometria la sostituisco

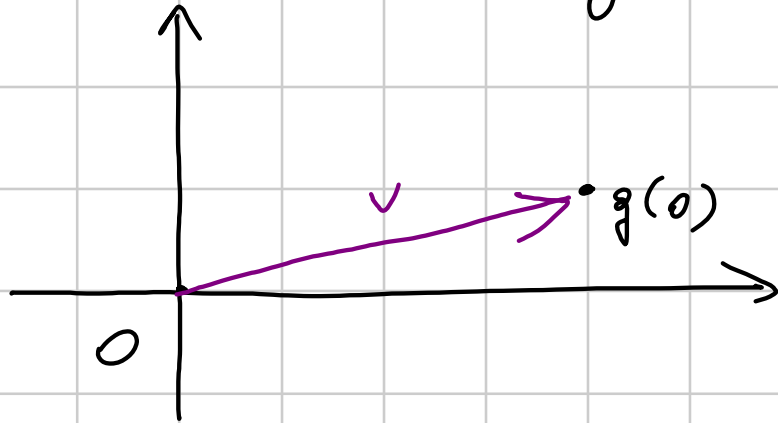
Successivamente con $\sigma_{\ell_1} \circ g$, $\sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1} \circ g$, ...
fino a ottenere $\sigma_{\ell_k} \circ \dots \circ \sigma_{\ell_1} \circ g = \text{id}$

$$\Rightarrow g = \sigma_{\ell_1} \circ \dots \circ \sigma_{\ell_k} -$$

Fisso sul piano un riferimento (identifico
il piano a $\mathbb{R}^2$) -

1) Sostituisco g con $g' = \sigma_{(-v)} \circ g$ dove

v unisce 0 a $g(0)$;



A questo punto ho $g'(0) = 0$ -

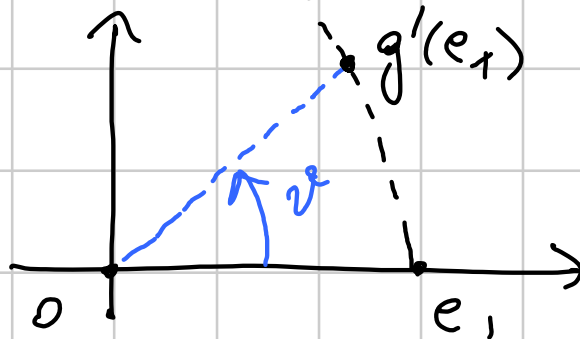
$$2) \quad Oss : \quad d(g'(0), g'(e_1)) = d(0, e_1) = 1$$

"

$$d(0, g'(e_1))$$

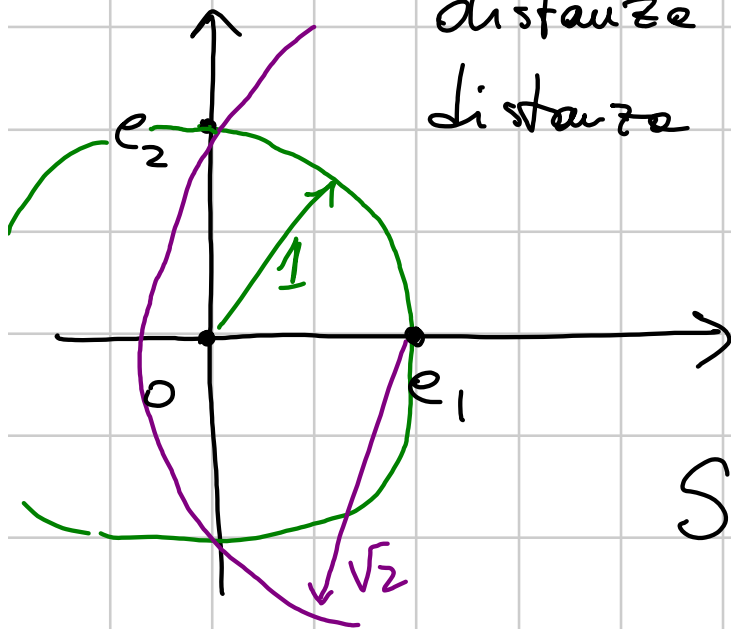
$\Rightarrow g'(e_1)$ ha distanza 1 da 0

Onne sostituisco g' con $g'' = \rho_{0, -v} \circ g'$
dove



$\cup_{12} \quad g''(0) = 0 \quad e \quad g''(e_1) = e_1 -$

3) $\cup_{ss}$: $g''(e_2)$ (come sopra) ha
 distanza 1 da 0
 distanza $\sqrt{2}$ da e_1



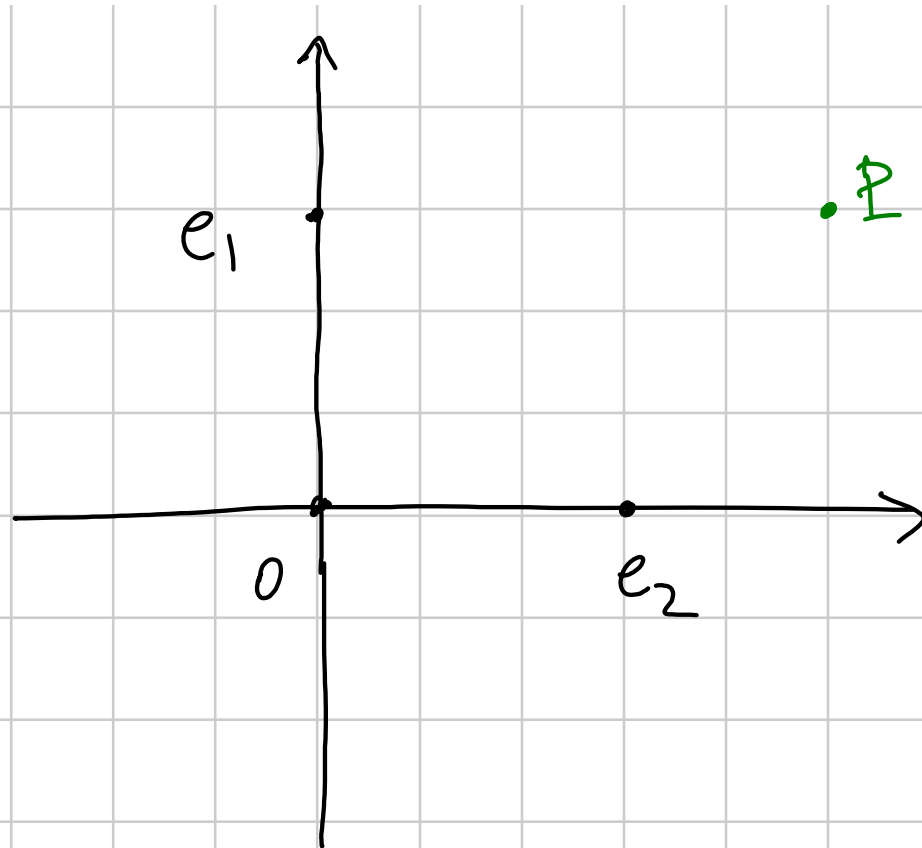
$$\Rightarrow g''(e_2) = \pm e_2$$

Se $g''(e_2) = e_2$, allora $g''' = g''$.

Se $g''(e_1) = -e$, posso $g'' = \sigma_e \circ g''$
 $e =$ asse ascisse -

A questo punto ho g'' fissa O, e_1, e_2 -

Noto: ho usato traslate, rotate, rifl.
compos. rifl.



g''' isometria
fissa $0, e_1, e_2$



$g'''(P)$ ha la
stessa distanza
di P da $0, e_1, e_2$



$$g'''(P) = P$$

(intersez. di tre circonf. con centri non allineati)

$$\Rightarrow g^{\parallel} = id - \underline{\underline{OK}},$$

II parte : Se ho $\sigma_{l_1} \circ \dots \circ \sigma_{l_k}$

devo vedere che

→ posso ridurre a $k \leq 3$

(per farlo devo vedere che

- $trans \circ trans = trans$
- $trans \circ rot = rot$
- $rot \circ trans = rot$

$$\bullet \text{rot} \circ \text{rot} = \begin{matrix} \nearrow \text{rot} \\ \searrow \text{transl} \end{matrix}$$

→ per $k=3$ devo vedere che

$$\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_3}$$

è sempre una riflessione o una glide riflessione -
 "  "

_____ o _____

Ese(28). $\mathbb{C}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^3}$. Trovare i vettori:

- 1) unitari
- 2) secondo corpo reale
- 3) somme corpo nulle
- 4) ortog a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ -

Potrei cercare $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ e imporre $\begin{cases} |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$.

Ma vece:

I) Impongo 2 & 3 cercando $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1-a \end{pmatrix}$; ora imposto 4 trovando a e alle fine

realizzato 1 $\pm$ non normalizzando (così mantengo 2 :

3 & 4 varrebbero anche moltiplicando per qualcosa e^{iu}) -

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1-a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1-i)a + (2+i)1 + (1-2i)(-1-a) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = i-3$$

$$Ore: \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i-3 \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix} -$$

II) Noto che 3 equivale a " $\perp$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ " -

Quindi cerco z che soddisfi 3 & 4, poi
moltiplico per $\lambda \in \mathbb{C}$ imponendo 2, infine $\pm$ normalizzo.

Cerco z che sia $\perp$ in $\langle . | . \rangle_{\mathbb{C}^3}$ a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}.$$

In $\mathbb{R}^3$ un vettore ortog a v_1, v_2 è $v_1 \wedge v_2$;
in $\mathbb{C}^3$ è $\overline{v_1 \wedge v_2}$; per noi:

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 \cdot (1+2i) - 1(2-i) \\ -1(1+2i) + 1(1+i) \\ 1 \cdot (2-i) - 1 \cdot (1+i) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1-3i \\ i \\ 1+2i \end{pmatrix}^-$$

One per ridurre 2 moltiplica per $A = -i$

ottengo ; $\begin{pmatrix} i-3 \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \longrightarrow \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i-3 \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}^-$

(29) Matrice proiez. ortog. in $\mathbb{C}^2$ su $\text{Span} \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix}$.

$$p(z) = \frac{(2-i)z_1 + (1+3i)z_2}{4+1+1+9} \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix} = \dots$$

$$= \underbrace{\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & -1+7i \\ -1-7i & 10 \end{pmatrix}}_A \cdot z$$

$$A \text{ proiet} \Rightarrow A^2 = A \quad (\text{FACILE})$$

$$A \text{ proiet. ortog. risp. a } \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2} \Rightarrow \text{autoaggiunte}$$

$$\Rightarrow A^* = A \quad (\text{ovvio})$$

$$(30) \text{ Ortormalizzare } \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}_{w_1} \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix}_{w_2} \text{ in } \mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} - \frac{(3-i)(1-i) + 2i(-2)}{6} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Verifico $v_1 \perp v_2$: $(1-i) \cdot 2 + (-2)(1-i) = 0 \checkmark$

③ Calcolare proiezz. ortog. di $\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$ su

$$\text{Span} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}}_{w_2} \right)$$

Potrei: ortogonalizzare $(w_1, w_2) \longrightarrow (v_1, v_2)$

$$\text{e mere } p(u) = \langle u/v_1 \rangle \cdot v_1 + \langle u/v_2 \rangle \cdot v_2.$$

$$\text{Yavice: } \text{Span} \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \right) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \right)$$

$$= \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ i \end{pmatrix} \right) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1+i \\ -1+i \\ -i \end{pmatrix} \right)$$

$$= \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix} \right) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ i-1 \end{pmatrix} \right)$$

$$p(u) = u - \frac{\langle u | z \rangle}{\|z\|^2} \cdot z = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot i + (-1)(-i-1)}{4+4+1+1} \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

= ...

Foglio 27/3 -

① Trovare autovalori e discutere Liapov -

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

(für gewöhnlich: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$ o. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$)

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & t - \lambda_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t - \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow \text{aufl. } \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

Per $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ autovel. $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 7$.

2×2 , 2 autovel. diff. $\Rightarrow$ diagonalizzabile.

Basta che la diagonalizzo:

$$V_1: A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1 \quad \begin{cases} -3x + 0 \cdot y = -3x \\ x + 7y = -3y \end{cases} \quad \checkmark$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2: \begin{cases} -3x + 0 \cdot y = 7x \\ x + 7y = 7y \end{cases} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(symmetric $\Rightarrow$ diag via orthog).

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 5$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -5$$

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} t-4 & 3 \\ 3 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$= t^2 - 5t - 5$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+20}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$v_1: \begin{cases} 4x - 3y = \frac{5+3\sqrt{5}}{2} x \\ -3x + y = \frac{5+3\sqrt{5}}{2} y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-3\sqrt{5})x = 6y \\ -6x = (3+3\sqrt{5})y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{5})x = 2y \\ -2x = (1+\sqrt{5})y \end{cases} \quad \checkmark$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$r_2 : \dots\dots\dots$$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad -$$

$$(c) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (t-3)(t-4) + 2 \\ t^2 - 7t + 14 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (7 \pm \sqrt{49-56}) \quad \text{distinct non real}$$

Nom è Liago su $\mathbb{R}$; su $\mathbb{C}$ si -

$$(d) \begin{pmatrix} 1+i & -\frac{1}{5}(7+i) \\ 2-i & 3 \end{pmatrix} \quad t_n = 4+i$$

$$\det = 3 + 3i + \frac{1}{5}(15 - 5i) = 3 + 3i + 3 - i = 6 + 2i$$

$$t^2 - (4+i)t + 6 + 2i$$

$$\Delta = 16 + 8i - 1 - 24 - 8i = -9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4+i \pm 3i}{2} = \begin{cases} 2+2i \\ 2-i \end{cases}$$

$$v_1: \begin{cases} \text{---} \\ (2-i)x + 3y = (2+2i)y \end{cases}$$

$$(2-i)x = (2i-1)y \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2i-1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

$$v_2: \begin{cases} \text{---} \\ (2-i)x + 3y = (2-i)y \end{cases} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$